

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER BISKRA
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL



GRAND ÉLÉMENT FINI B14
POUR
L'ÉLASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE

MÉMOIRE Présenté pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER En Génie Civil

Option: MÉCANIQUE DES SOLS ET STRUCTURES

par Bahi-Eddine LAHOUEL

Sous la direction de Mohamed Tahar BELARBI

Devant le Jury composé de :

Président :	S. BENMEBAREK	M.C. Univ. de BISKRA
Rapporteur :	M.T. BELARBI	M.C. Univ. de BISKRA
Examineurs :	T. OUTTAS	M.C. Univ. de BATNA
	R. CHEBILI	Ph.D Univ. de BISKRA
Invité :	L. BELOUNAR	C.C. Univ. de BISKRA

Date de soutenance : 10 décembre 2003

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **M.T. Belarbi**, Maître de Conférence à l'université de Biskra et directeur de ce mémoire pour son assistance, sa disponibilité et pour m'avoir dirigé et encouragé pendant l'accomplissement de ce travail. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur S. Benmebarek, Maître de Conférence à l'université de Biskra, pour avoir accepté de présider le jury, je lui en suis très reconnaissant ;
- Monsieur T. Ouatas, Maître de Conférence à l'université de Batna, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail, je lui en suis très reconnaissant ;
- Monsieur R. Chebili, Ph. D., Chargé de Cours à l'université de Biskra, qui a accepté d'examiner ce mémoire, je le remercie très sincèrement ;
- Monsieur L. Belounar, Chargé de Cours à l'université de Biskra, qui a accepté lui aussi d'examiner ce mémoire, je le remercie très sincèrement ;

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation, trouvent ici ma gratitude et mes remerciements.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur T. Maalem pour son aide précieuse.

A ma famille

ملخص

إن هذه المذكرة تخص تشكيل عنصر محدود يعتمد على مبدأ الانتقال و ينتمي إلى مجموعة عناصر المجسمات الثلاثية الأبعاد. العنصر معرف بأربعة عشر عقدة (ثمانية في قمم المجسم و ستة في منتصف الواجهات). كل عقدة تملك ثلاثة درجات حرية يمثلون الانتقالات حسب الاتجاهات الثلاثة. هذا العنصر المسمى بالمجسم ذو الأربعة عشر عقدة أو B14 تم تطويره وفق طريقة Serendip .

العنصر المحدود B14 هو في الحقيقة عنصر متوسط ما بين مجسم الدرجة الأولى (ذو ثمانية عقد) B8 الذي يمكن أن يكون صلب في بعض أساليب التشوه و يحتاج في غالب الأحيان إلى قطبة جد رفيعة و مجسم الدرجة الثانية (ذو العشرين عقدة) B20 المنتمي إلى مجموعة Serendip الذي يعتبر استعماله جد مكلف لانه يستعمل ستون درجة حرية. و من الملاحظ أن استعمال هذا الأخير و العنصر ذو السبعة و العشرين عقدة B27 المنتمي إلى مجموعة Lagrange يؤدي إلى نفس النتيجة تقريبا.

العنصر المحدود B14 تم تقييمه من خلال سلسلة من الاختبارات المرجعية و التطبيقات العددية المتعلقة بمسائل خطية (مجال مرن) و بمسائل لا خطية (مجال مرن بلاستيكي).

RÉSUMÉ

Ce mémoire a trait à la formulation d'un élément fini basé sur le modèle *déplacement* et appartenant à la famille des éléments tridimensionnels hexaédrique, il est défini par quatorze nœuds, huit nœuds aux sommets de l'hexaèdre et six aux centres des faces, chaque nœud possède trois degrés de liberté qui sont les déplacements selon les trois dimensions, cet élément baptisé brique à quatorze nœuds ou **B14**, a été développé suivant une formulation de type *Serendip*.

L'élément fini **B14** est en fait, un élément intermédiaire entre l'hexaèdre du premier degré (brique à huit nœuds) **B8**, qui peut être tout à fait rigide dans certains modes de déformation, nécessitant le plus souvent un raffinement important du maillage, et l'hexaèdre du second degré (brique à vingt nœuds) **B20** appartenant à la famille de *Serendip* dont l'utilisation reste très coûteuse, car il implique soixante degrés de liberté. Il est à noter que ce dernier offre la même approximation quadratique que l'élément Lagrangien de vingt sept nœuds **B27**.

Les performances et les qualités de l'élément fini **B14** sont évaluées à travers une série de cas-tests standard ou non standard et d'applications numériques, relatifs aux problèmes élastiques et élastoplastiques.

Mots-clés :

Eléments finis – Modèle déplacement – Hexaèdre – B8 – B14 – B20 – Lagrange – Serendip – Patch test volumique.

ABSTRACT

This thesis concerns the formulation of a finite element based on the *displacement* model and pertaining to the three-dimensional elements family, the brick element is defined by fourteen nodes (eight corner and six mid-face), each node has three degrees of freedom which are the displacements u , v and w , this element named brick with fourteen nodes or **B14** was developed according to a formulation of the *Serendip* type.

The **B14** finite element is in fact, an intermediate element between the hexahedron of the first order (eight-node brick) **B8** which can be quite stiff in certain deformation modes, generally requiring a significant refinement of the mesh, and the hexahedron of the second order (twenty-node brick) **B20** pertaining to the family of *Serendip* of which the use remains very expensive, because it implies sixty degrees of freedom. It should be noted that the element **B20** offers the same quadratic approximation as the Lagrangien element of twenty seven nodes **B27**.

The performances and qualities of the **B14** finite element are evaluated through several pathological tests available in the literature and numerical applications relating to the elastic and elastoplastic problems.

Keywords :

Finite element – Displacement model – Hexahedron – B8 – B14 – B20 – Lagrange – Serendip – 3-D Patch test.

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1	Introduction – Historique	2
1.2	Modélisation et discrétisation	4
1.2.1	Introduction	4
1.2.2	Modélisation du comportement de la structure	4
1.2.3	Discrétisation de la structure modélisée	5
1.2.4	Interprétation et validation des résultats	6
1.3	Modèles d'éléments finis	6
1.3.1	Modèle déplacement	7
1.3.2	Modèle équilibre ou contraintes	7
1.3.3	Modèle mixte	8
1.3.4	Modèle hybride	8
1.3.5	Modèle déformation	8
1.4	Caractéristiques d'un élément fini	9
1.4.1	Attributs d'un élément fini	9
1.4.2	Choix des éléments finis	9
1.5	Notion de convergence	10
1.5.1	Introduction	10
1.5.2	Critères de convergence	11
1.5.3	Éléments non conformes et Patch-test	11
1.6	Éléments de massif tridimensionnels	12
1.6.1	Description	12
1.6.2	Maillage d'éléments finis de massif	13
1.7	Langage de programmation Fortran 90	14
1.8	Objectif de la thèse	19
1.9	Plan de la thèse	19

CHAPITRE 2

FONDEMENTS THÉORIQUES

2.1	Elasticité tridimensionnelle	21
2.1.1	Equations de l'élasticité	21
2.1.2	Déplacements	22
2.1.3	Déformations	23
2.1.4	Contraintes	24
2.1.5	Les relations de compatibilité	25

2.1.6	Relations rhéologiques	25
2.1.7	Relations d'équilibre	28
2.2	Forme différentielle ou forte des équations de la mécanique des solides	28
2.3	Forme intégrale ou faible des équations de l'équilibre	30
2.4	Principe des travaux virtuels	32
2.5	Energie potentielle totale	32
2.6	Formulation des équations d'équilibre statique dans la MEF	33
2.7	Méthodes de construction des fonctions de forme	35
2.7.1	Introduction	35
2.7.2	Fonctions de forme en coordonnées généralisées	36
2.7.3	Fonctions de forme en coordonnées naturelles	38
2.8	Formulation isoparamétrique	39
2.9	Intégration numérique	42
2.9.1	Introduction	42
2.9.2	Ordre de l'intégration numérique	43
2.9.3	Intégration réduite	43
2.9.4	Intégration sélective	43

CHAPITRE 3

FORMULATION DES ÉLÉMENTS B8, B20 ET P11

3.1	Introduction	46
3.2	Formulation de l'élément hexaédrique à huit nœuds – B8	46
3.3	Formulation de l'élément hexaédrique à vingt nœuds de <i>Serendip</i> – B20	50
3.4	Formulation d'un nouvel élément pentaédrique (prisme) à onze nœuds – P11	53

CHAPITRE 4

FORMULATION DE L'ÉLÉMENT B14

4.1	Introduction	56
4.2	Formulation des éléments à 14 nœuds (types 1 à 5)	58
4.3	Formulation de l'élément B14 type 6	62
4.4	Forces nodales équivalentes	65

CHAPITRE 5

VALIDATIONS

5.1	Introduction	70
5.2	Test des valeurs propres	70
5.3	Single element test	75
5.4	Tests pour un seul élément	76
	5.4.1 Le cube bi-unité	76
	5.4.2 Plaque en porte à faux	77
5.5	Patch-tests	78
	5.5.1 Patch-test quasi-3D	78
	5.5.2 Patch-test 3D réel avec des éléments distordus	79
	5.5.3 Conclusion	81
5.6	Tests de la poutre élancée de MacNeal	81
5.7	Tests de Cheung et Chen	83
5.8	Test de la poutre incurvée	86
5.9	Test de sensibilité à l'élancement (rapport d'aspect)	87
5.10	Tests d'incompressibilité	88
	5.10.1 Test d'incompressibilité pour une barre de deux éléments	88
	5.10.2 Test d'incompressibilité pour une poutre cantilever	89

CHAPITRE 6

APPLICATIONS

6.1	Introduction	92
6.2	Flexion d'une plaque encastree sous une charge uniforme	92
6.3	Problème de Boussinesq	96
6.4	Applications non linéaires	98
	6.4.1 Généralités	98
	6.4.2 Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent	116
	6.4.3 Analyse de la stabilité d'un talus	117
	CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	121
	BIBLIOGRAPHIE	124
	ANNEXE	127