Mathématiques et Applications 88

Xavier Blanc
Claude Le Bris

Homogénéisation en milieu périodique... ou non

Une introduction

SMAI
Springer

Mathématiques et Applications

Volume 88

Le but de cette collection, créée par la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), est d'éditer des cours avancés de Master et d'école doctorale ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Certains ouvrages auront ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres pourront constituer des textes de référence.La principale source des manuscrits réside dans les très nombreux cours qui sont enseignés en France, compte tenu de la variété des diplômes de fin d'études ou des options de mathématiques appliquées dans les écoles d'ingénieurs. Mais ce n'est pas l'unique source: certains textes pourront avoir une autre origine.

This series was founded by the "Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles" (SMAI) with the purpose of publishing graduate-level textbooks in applied mathematics. It is mainly addressed to graduate students, but researchers and engineers will often find here advanced introductions to current research and to recent results in various branches of applied mathematics. The books arise, in the main, from the numerous graduate courses given in French universities and engineering schools ("grandes écoles d'ingénieurs"). While some are simple textbooks, others can also serve as references.

Xavier Blanc • Claude Le Bris

Homogénéisation en milieu périodique... ou non

Une introduction

Springer

Xavier Blanc
Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Paris Cité & Sorbonne
Université, CNRS
Paris, France

Claude Le Bris
CERMICS
École des Ponts ParisTech & INRIA
Marne La Vallée, France

This work was supported by European Office of Aerospace Research and Development (FA8655-20-1-7043) and Office of Naval Research (N00014-20-1-2691)

ISSN 1154-483X ISSN 2198-3275 (electronic)
Mathématiques et Applications
ISBN 978-3-031-12800-4 ISBN 978-3-031-12801-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-031-12801-1

Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J70, 35B27, 65M60, 65M12, 74Q15, 76M50

This Springer imprint is published by the registered company Springer Nature Switzerland AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Entre dans la mer par les petits ruisseaux, non d'un trait ; car c'est par le plus facile qu'il convient d'arriver au plus difficile.

THOMAS D'AQUIN *(1225–1274)*

Seize conseils pour acquérir le trésor de la science.

Avant-Propos

La théorie de l'homogénéisation est née il y a une cinquantaine d'années. Elle a donc atteint l'âge de la maturité, voire de la sagesse. Ses ramifications sont nombreuses. Initiée à l'intersection d'un point de vue abstrait et de considérations appliquées plus explicites sur le cas d'un environnement périodique, elle a été ensuite progressivement considérée dans des cas localement périodiques, dans un cadre stochastique, ... Partie du cadre linéaire, elle aborde aujourd'hui, après les équations semi-linéaires, après les équations quasi-linéaires (par exemple, le p-laplacien), etc, les équations complètement non linéaires (comme les équations de Hamilton-Jacobi). Originalement concentrée sur le changement d'échelle local à l'intérieur d'un domaine, elle a su aussi se muer en un outil théorique pour la dérivation rigoureuse de lois de paroi. Elle a été appliquée non seulement aux équations mais aux *systèmes*, par exemple le système de Stokes. Après les problèmes "à second membre", elle a traité des problèmes spectraux, après les problèmes stationnaires des problèmes d'évolution, après les problèmes posés sur des domaines de géométries simples ceux posés sur des domaines perforés ou des domaines de géométrie encore plus complexe, comme les domaines à frontière fractale, etc.

Avec la maturité, une théorie mathématique rencontre deux écueils.

Le premier écueil est la technicité. Les choses simples ont, majoritairement, été faites. Celles qui restent sont difficiles, requièrent une créativité exceptionnelle et un arsenal technique élaboré. Certaines des contributions les plus récentes concernent souvent des raffinements dont l'intérêt échappe au lecteur profane. Or, si la sophistication de certains sujets peut être, pour certains lecteurs, un incomparable stimulant, elle est, pour d'autres lecteurs, un obstacle rédhibitoire.

Le second écueil est le risque que la théorie, emportée par sa propre dynamique, et pourtant originalement motivée par les applications, dérive vers une abstraction parfois difficile à rapprocher des considérations pratiques.

Notre motivation pour l'écriture de ce livre est issue des constats précédents.

Il nous a paru temps de synthétiser l'essence de la théorie et de la rendre plus accessible à un œil neuf. Des traités monumentaux, de référence, existent sur la théorie de l'homogénéisation, la plupart écrits par les contributeurs historiques de la théorie. Ces traités sont indiscutables et exhaustifs : [BLP11, ZKO94, Tar09]. Il n'est pas question de rivaliser avec eux. D'autres traités viennent utilement les compléter sur certains aspects : [All02, Bra02, PS08, SPSH92]. De même existent des articles originaux qui sont des tournants de la recherche en le domaine, et des articles de synthèse, comme [ES08], faisant autorité. A l'autre bout du spectre, en plus des avancées permanentes publiées dans les journaux de recherche, des livres de recherche sur le sujet paraissent régulièrement, par exemple [AKM19]. Ils présentent des développements nouveaux, dont certains sont considérables. Il existe aussi des ouvrages didactiques et élémentaires, par exemple [CD99] ou [BR18]. Mais, ils ne sont pas, eux, légion. Il n'est pas interdit d'avoir l'ambition d'en écrire un nouveau, qui complémentera ceux qui existent déjà, fournissant un regard encore différent, espérant que le lecteur voulant découvrir la théorie, son histoire et sa vitalité, puisse, pour faire son apprentissage, choisir l'approche qui lui conviendra le mieux dans une palette encore plus large. L'ouvrage présent s'inscrit dans cette dernière catégorie.

Il est aussi temps de rapprocher la théorie de ses objectifs pratiques. Dès son origine, on l'a dit, le développement de la théorie a été notamment motivé par des questions de sciences des matériaux (transition de phases, propriétés de mélange, etc) et ses succès ont été significatifs pour la compréhension phénoménologique et l'équipement théorique d'une grande classe de tels phénomènes. Mais la théorie de l'homogénéisation a aussi une utilité plus quantitative. Elle fait partie, dans sa version moderne, de la grande famille des *méthodes multi-échelles*. Elle sert en effet de guide théorique à plusieurs approches de simulation numérique dans ce domaine, lesquelles approches doivent traiter de situations très variées. En un temps de calcul limité, les praticiens des sciences de l'ingénieur veulent obtenir une réponse quantitative à la question qu'ils se posent. Pour tel matériau, dont la géométrie des microstructures n'obéit pas nécessairement à des hypothèses mathématiques idéalisées, que peut-on attendre comme propriétés macroscopiques ? L'équipement théorique fourni par la théorie de l'homogénéisation peut s'avérer frustrant: si on a, en milieu industriel, une durée typique de deux heures de temps calcul disponible pour fournir une réponse, certes approchée mais correcte en tendance ou en ordre de grandeur, il n'est pas clair de comprendre comment choisir dans la palette des modélisations possibles et comment, au besoin, réduire les ambitions de branches de la théorie soucieuses, au premier chef, de précision.

Certains de nos propres travaux de recherche [BLL03, BLL07a, BLL07b, BLL12, BLL15, BLL18, BLL19], effectués sous la direction et avec la collaboration de Pierre-Louis Lions, nous ont amenés à développer un portefeuille de cadres de modélisations, que nous avons regroupés sous l'appellation "non-périodique" pour souligner qu'ils s'affranchissaient d'une hypothèse naturelle des premiers temps de la théorie, tout en ne s'inscrivant pas nécessairement sous la chapeau des modélisations aléatoires qui connaissent à juste titre aujourd'hui le succès grandissant que l'on sait. Notre intention est d'utiliser cet ouvrage pour revisiter ces contributions (dont certaines ont près de vingt ans d'âge), pour les mettre en perspective, les simplifier, et pour montrer en quel sens elles contribuent en fait à résoudre certaines des questions soulevées ci-dessus. Au passage, nous présentons aussi la théorie périodique et la théorie stochastique, à la fois comme élément de départ ou de référence, et pour souligner, explicitement ou en creux, les différences avec les cas "non-périodiques" que nous choisissons d'étudier plus en détail.

En un certain sens, ce que nous proposons ici est donc une relecture (très partielle) de la théorie de l'homogénéisation à travers le prisme d'une large catégorie de problèmes non périodiques, tous orientés vers la résolution pratique.

Plus mathématiquement, (ou plus philosophiquement, ceci n'est qu'une affaire de point de vue), nous utilisons aussi les problèmes non périodiques considérés comme une batterie de *tests* sur la stabilité des résultats de la théorie de l'homogénéisation périodique par rapport à des perturbations de cette hypothèse idéalisée.

Notre ouvrage est majoritairement basé sur des cours que nous avons enseignés au niveau M2 ou équivalent, à l'Université Pierre et Marie Curie, à l'Université Paris-Diderot, et à l'Université de Chicago. Il suppose donc du lecteur une familiarité avec les notions élémentaires d'analyse fonctionnelle et de théorie des équations aux dérivées partielles de niveau L3/M1, et pas plus. Vu notre objectif appliqué, nous supposerons aussi que le lecteur a déjà été *exposé* à quelques notions de base sur les techniques de discrétisation des équations différentielles. Incidemment, quelques notions de théorie des probabilités seront aussi utiles. Dans ces trois cas, analyse, analyse numérique, probabilités, nous ferons au fil de l'eau, en annexe, les rappels nécessaires à rendre notre exposé autant que possible autonome. Que le lecteur se tranquillise donc. L'idée est de lui tenir la main. L'idée est aussi de l'initier, relativement tôt dans sa formation, à quelques interprétations pas toujours rigoureuses mais diablement intuitives, bien utiles pour clarifier les situations confuses, choses que l'on réserve malheureusement parfois à un public plus restreint, celui ayant *déjà* compris…

Nous remercions nos collègues proches pour leur relecture de versions préliminaires de cet ouvrage et en particulier Yves Achdou, Adina Ciomaga, David Gérard-Varet, Rémi Goudey, Pierre Le Bris, Frédéric Legoll, Tony Lelièvre, Alexei Lozinski, Sylvain Wolf. Nous remercions les deux referees anonymes pour leur relecture de la première version soumise et leurs nombreuses suggestions constructives. L'adresse https://ljll.math.upmc.fr/~blanc/files/errata-livre.pdf contient la correction des erreurs détectées après soumission de la version publiée. Nous remercions aussi Rutger Biezemans, Ludovic Chamoin, Gaspard Jankowiak et Alexei Lozinski pour nous avoir grâcieusement autorisés à utiliser certains de leurs résultats numériques pour illustrer notre propos. Le premier auteur remercie Inria pour l'accord d'une délégation partielle en 2019-2020 et 2020-2021 qui lui a permis de trouver le temps nécessaire pour finaliser ce projet. Le second auteur remercie le département de mathématiques de l'Université de Chicago pour son hospitalité au cours de nombreuses visites ces dernières années. Il remercie également *European Office of Aerospace Research and Development* (Grant FA8655-20-1-7043) et *Office of Naval Research* (Grant N00014-20-1-2691) pour leur soutien constant de sa recherche depuis 2008.

Paris, France
2022

Préliminaire

Notre sujet d'étude principal, hormis quelques excursions (que nous nous autoriserons, un peu au Chapitre 2, et surtout au Chapitre 6) pour considérer quelques équations immédiatement reliées à celle-ci, sera l'équation

$$\boxed{-\operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\,\nabla u^\varepsilon(x)) \;=\; f(x).} \tag{1}$$

Cette équation (1) est supposée posée sur un domaine borné $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Le domaine $\mathcal{D}$ est supposé avoir une frontière $\partial\mathcal{D}$ suffisamment régulière. Au besoin, nous préciserons cette régularité plus loin. La dimension ambiante d est typiquement égale à 3, bien que rien ne nous y oblige. Nous regarderons beaucoup aussi le cas de la dimension $d = 1$. Nous nous expliquerons plus loin sur ce choix qui peut paraître surprenant aux yeux des experts pour un sujet comme l'homogénéisation. Nous regarderons aussi parfois, exceptionnellement, le cas de la dimension $d = 2$. Cette dimension, si elle est traditionnellement très pratique pour l'exposé de techniques de discrétisation numérique car les questions géométriques (de maillage par exemple) y sont moins lourdes qu'en dimension 3, présente, pour toutes les questions d'analyse fonctionnelle et d'analyse des équations aux dérivées partielles et cela ne fait pas exception ici, un caractère toujours très particulier.

L'équation (1) est complétée d'une condition au bord qui, le plus souvent dans la suite sera la condition de Dirichlet homogène

$$u^\varepsilon(x) \;=\; 0, \tag{2}$$

sur le bord $\partial\mathcal{D}$ du domaine, mais pourrait aussi être une condition de Neumann ou une autre condition. Nous éclaircirons ceci le moment venu.

Dans (1), le coefficient $a_\varepsilon(x)$ est responsable de toute la difficulté du problème. Intuitivement, il encode la nature microscopique du milieu, hétérogène, ou "oscillante", à une échelle $0 < \varepsilon \ll 1$. Au contraire, la fonction $f(x)$ présente au membre de droite de l'équation (1) n'est, elle, pas oscillante, et il s'agit là d'un point capital, que l'absence de l'indice ε dans ce membre de droite souligne. D'un point de vue modélisation, disons que la fonction f désigne "les forces" appliquées au domaine, lesquelles sont indépendantes de l'échelle ε de la microstructure du milieu.

Le coefficient a_ε sera le plus souvent à valeurs scalaires, surtout pour des raisons de simplicité, et quand le considérer à valeurs matricielles n'apportera rien au raisonnement que des technicalités inutiles. Il est cependant utile de garder à l'esprit que, dans les applications pratiques notamment, il est le plus souvent à valeurs *matricielles*. De même, ce coefficient $a_\varepsilon(x)$ sera le plus souvent, dans les pages qui suivent, un changement d'échelle (souvent désigné par l'anglicisme "un rescalé" ou "un rescaling")

$$a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3}$$

d'un coefficient $a(x)$ fixé. La théorie générale, abstraite, de l'homogénéi sation est conçue pour pouvoir traiter le cas d'un coefficient $a_\varepsilon(x)$ non nécessairement de cette forme, mais les développements que nous effectuerons nous, dans un but très pratique, nécessiteront quasiment toujours cette hypothèse très forte de structure.

Nous sommes parfaitement conscients des limitations de ce cadre très particulier, et le soulignerons chaque fois que nécessaire. Nous soulignerons aussi, bien sûr, quand nous saurons nous en affranchir, ce qui sera en particulier le cas pour la mise en pratique (et parfois l'étude) des méthodes numériques multiéchelles au Chapitre 5. Pour autant, nous estimons que la compréhension de ces cas "rescalés" est déjà un accomplissement substantiel.

Quoi qu'il en soit, nous supposerons toujours que ce coefficient $a_\varepsilon(x)$ a les propriétés de coercivité nécessaires à ce que l'équation (1) soit bien posée, en utilisant des arguments classiques et sans avoir recours à des théories plus élaborées. Dans le cas scalaire, ces propriétés reviennent à supposer que ce coefficient est, uniformément en ε, isolé de zéro et borné supérieurement, c'est-à-dire

$$\exists\, 0 < \mu, \quad \exists\, M < +\infty, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \mu \leq a_\varepsilon(x) \leq M, \tag{4}$$

pour tout $x \in \mathcal{D}$ (ou au moins presque tout x si le coefficient n'est pas continu). Nous ne regarderons donc nullement les questions de dégénérescence liées aux éventuelles annulations, ou explosions, du coefficient. Dans ces bonnes conditions, une application immédiate du Lemme de Lax-Milgram montre que la solution de (1)–(2) existe de manière unique, disons dans l'espace de Sobolev $H^1_0(\mathcal{D})$ lorsque $f \in L^2(\mathcal{D})$ (et même moins que cela). La difficulté majeure pour la résolution *pratique* de (1) (nous entendons par cela sa résolution numérique par une méthode de discrétisation numérique quelle qu'elle soit) est qu'il est attendu que les oscillations de la solution $u^\varepsilon(x)$ soient au moins aussi petites que celles du coefficient $a_\varepsilon(x)$, c'est-à-dire de taille $\varepsilon \ll 1$. Pour les capturer, il faudra donc un pas de discrétisation h en espace (taille du maillage éléments finis par exemple), bien plus petit que ε. Et nous allons nous placer dans les conditions où, précisément, nous ne pouvons pas forcément nous permettre cette taille de maillage, compte-tenu de moyens de calcul limités.

Disons tout de suite que, si notre propos sera concentré sur l'étude de l'équation (1), il n'est pour autant pas trivial. En effet...

<u>Avertissement 1 au lecteur :</u>
Il y aurait tout à perdre à sous-estimer l'équation (1).
Bien que linéaire et sous forme divergence,

- **elle recèle, pour l'homogénéisation, des difficultés mathématiques réelles, dont certaines résistent encore aujourd'hui à l'analyse,**
- **elle est présente, sous une forme ou une autre, dans une foule d'applications pratiques.**

Nous verrons en effet dans la suite que le caractère linéaire de l'équation n'est en fait qu'un *leurre*, puisque le processus d'homogénéisation s'intéresse en fait à la variation de la solution u_ε en fonction du paramètre a_ε, ce qui est *de facto* une application non linéaire et non locale. Quant à la deuxième assertion sur la pertinence pratique, soulignons dès maintenant que l'équation (1) apparaît telle quelle en modélisation de la thermique, de l'élasticité, de l'électrostatique, etc... Une telle équation, ou une équation approchante, intervient aussi dans un large catalogue de problèmes plus complexes, comme des problèmes dépendant du temps et éventuellement non linéaires.

L'idée de la théorie de l'homogénéisation est de plonger le problème particulier (1), pour une petite échelle ε fixée, dans une *famille* de problèmes constituée des équations (1) pour une suite de valeurs de ε tendant vers zéro. Ce faisant, on espère obtenir à la limite "$\varepsilon = 0$" un problème en fait plus simple à comprendre et aussi à résoudre numériquement, où la petite échelle ε a disparu, et donc le pas de maillage h peut être pris bien plus grand que initialement prévu. Cet espoir sera confirmé dans beaucoup de situations, et nous retrouvons là un caractère générique d'une grande catégorie de problèmes mathématiques, plus simples à résoudre asymptotiquement que pour une valeur fixée. Nous verrons que, pour (1), l'équation limite obtenue aura la forme

$$- \operatorname{div}(a^*(x)\, \nabla u^*(x)) = f(x), \tag{5}$$

où la difficulté est maintenant cachée dans la détermination pratique du coefficient a^*, dit coefficient homogénéisé, qui, dans la majeur partie de la suite de cet ouvrage, sera constante. En un certain sens, nous avons "divisé pour régner": la résolution supposée difficile de (1) a été troquée contre le calcul de a^* puis la résolution supposée plus simple de (5). Comme nous le verrons, mener ce programme à bien pour une grande variété de coefficients a_ε n'est pas forcément simple ! Ce qui nous amène à un avertissement capital, lié au fait que nous n'avons pas seulement un objectif de compréhension qualitative des phénomènes mais que nous nous sommes délibérément mis dans la situation où nous poursuivons aussi un but pratique.

Avertissement 2 au lecteur :
L'approche d'homogénéisation a un coût.
Elle prend sa pleine puissance (qui est alors considérable)

- **soit quand l'objectif est un objectif de compréhension,**
- **soit quand l'objectif pratique est de résoudre (1) de manière répétée,**

par exemple parce que cette équation (1) doit être résolue successivement pour plusieurs fonctions $f(x)$ au membre de droite. En d'autres termes, si l'objectif est purement pratique et est de résoudre *une seule fois* l'équation (1), pour ε petit, il vaut mieux, si on peut exceptionnellement disposer de moyens de calcul suffisants, les utiliser plutôt que de s'engager dans la voie que nous allons décrire ! Ce n'est pas, à notre avis, faire offense à une théorie que de bien délimiter son utilité. C'est au contraire la valoriser.

Etant entendu que nous allons majoritairement concentrer notre exposé sur l'équation (1) aux dépens de toutes les autres équations, et que nous nous engageons effectivement sur la voie que nous savons coûteuse de l'homogénéisation, qu'allons-nous faire ? Nous allons envisager toutes les variations possibles et imaginables du coefficient $a_\varepsilon(x)$ inséré dans (1), lequel coefficient encode la nature intime du milieu (du matériau) étudié. Le rapprocher le plus possible de la réalité est un enjeu théorique et pratique considérable.

Table des matières