

Mathématiques et Applications 86

Georges-Henri Cottet
Emmanuel Maitre
Thomas Milcent

Méthodes Level Set pour l'interaction fluide-structure



 Springer

The Springer logo features a stylized chess knight (horse) facing left, positioned above the word 'Springer' in a serif font.

Mathématiques et Applications

Volume 86

Editors-in-Chief

Marc Hoffmann, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, France

Valérie Perrier, Laboratoire Jean-Kuntzmann, Université Grenoble-Alpes, Grenoble, France

Series Editors

Rémi Abgrall, Institut für Mathematik, Universität Zürich, Zurich, Switzerland

Grégoire Allaire, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, France

Karine Beauchard, ENS Rennes, Bruz, France

Michel Benaïm, Institut de mathématiques, Université de Neuchâtel, Neuchâtel, Switzerland

Gérard Biau, LPSM, Sorbonne Université, Paris, France

Arnak Dalalyan, ENSAE / CREST, Palaiseau, France

Arnaud Debussche, ENS Rennes, Bruz, France

Sourour Elloumi, UMA, ENSTA, Palaiseau, France

Isabelle Gallagher, DMA, ENS, Paris, France

Josselin Garnier, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, France

Stéphane Gaubert, INRIA, École Polytechnique, Palaiseau, France

Emmanuel Gobet, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, France

Raphaèle Herbin, Institut de Mathématiques de Marseille, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France

Claude Le Bris, CERMICS, École des Ponts ParisTech, Marne la Vallée, France

Sylvie Méléard, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, France

Felix Otto, MPI MIS, Leipzig, Germany

Gabriel Peyré, DMA, ENS, Paris, France

Pierre Rouchon, CAS, MINES ParisTech, Paris, France

Annick Sartenaer, Département de mathématique, Université de Namur, Namur, Belgium

Eric Sonnendrücker, MPI für Plasmaphysik, Garching, Germany

Alain Trounev, Centre Borelli, ENS Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France

Cédric Villani, IHP, Paris, France

Enrique Zuazua, Department of Mathematics, Friedrich-Alexander-Universität,
Erlangen-Nürnberg, Germany

Le but de cette collection, créée par la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), est d'éditer des cours avancés de Master et d'école doctorale ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Certains ouvrages auront ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres pourront constituer des textes de référence. La principale source des manuscrits réside dans les très nombreux cours qui sont enseignés en France, compte tenu de la variété des diplômes de fin d'études ou des options de mathématiques appliquées dans les écoles d'ingénieurs. Mais ce n'est pas l'unique source: certains textes pourront avoir une autre origine.

This series was founded by the “Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles” (SMAI) with the purpose of publishing graduate-level textbooks in applied mathematics. It is mainly addressed to graduate students, but researchers and engineers will often find here advanced introductions to current research and to recent results in various branches of applied mathematics. The books arise, in the main, from the numerous graduate courses given in French universities and engineering schools (“grandes écoles d'ingénieurs”). While some are simple textbooks, others can also serve as references.

More information about this series at <http://www.springer.com/series/2966>

Georges-Henri Cottet · Emmanuel Maitre ·
Thomas Milcent

Méthodes Level Set pour l'interaction fluide-structure

 Springer

Georges-Henri Cottet
Laboratoire Jean Kuntzmann
Université Grenoble Alpes, CNRS,
Grenoble-INP*
Grenoble, France

Emmanuel Maitre
Laboratoire Jean Kuntzmann
Université Grenoble Alpes, CNRS,
Grenoble-INP*
Grenoble, France

Thomas Milcent
Institut de Mécanique de Bordeaux
Arts et Métiers, Université Bordeaux, CNRS
Bordeaux, France

ISSN 1154-483X

ISSN 2198-3275 (electronic)

Mathématiques et Applications

ISBN 978-3-030-70074-4

ISBN 978-3-030-70075-1 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-030-70075-1>

Mathematics Subject Classification: 35Q30, 65M22, 74F10, 76D05

© The Editor(s) (if applicable) and The Author(s), under exclusive license to Springer Nature Switzerland AG 2021

This work is subject to copyright. All rights are solely and exclusively licensed by the Publisher, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other physical way, and transmission or information storage and retrieval, electronic adaptation, computer software, or by similar or dissimilar methodology now known or hereafter developed.

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, service marks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

The publisher, the authors and the editors are safe to assume that the advice and information in this book are believed to be true and accurate at the date of publication. Neither the publisher nor the authors or the editors give a warranty, expressed or implied, with respect to the material contained herein or for any errors or omissions that may have been made. The publisher remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

This Springer imprint is published by the registered company Springer Nature Switzerland AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Avant-propos

Les problèmes d'interaction fluide-structure interviennent dans de nombreux domaines de l'ingénierie : mécanique des structures immergées, aéroélasticité, biomécanique, effets de lubrification dans des écoulements de conduite, transports de particules, transport de sédiments, érosion des littoraux ... D'un point de vue mathématique et numérique ces problèmes représentent un réel défi dans la mesure où les fluides et les solides sont naturellement décrits par des modèles de nature différente, eulérienne pour les fluides et lagrangienne pour les solides, qui nécessitent des méthodes de discrétisation adaptées à ces modèles. Les méthodes traditionnelles pour traiter ces problèmes, dites ALE (pour Arbitrary Lagrangian Eulerian), sont calquées sur ces différentes modélisations. Elles utilisent une discrétisation eulérienne des fluides et une discrétisation lagrangienne des solides, avec des maillages adaptés et des conditions de couplage appropriées pour traduire la continuité des vitesses et des efforts aux interfaces.

Dans les quinze dernières années sont apparues des alternatives à ces méthodes basées sur des modélisations eulériennes des deux types de milieux. Fluides et solides sont considérés comme un seul système avec des lois de comportement qui varient en espace et en temps. L'intérêt de ces méthodes est la possibilité qu'elles offrent d'utiliser un seul modèle numérique et un seul maillage pour l'ensemble du système, avec l'inconvénient de donner une description moins fine de l'interface et des conditions que l'on impose sur celle-ci.

Les méthodes de frontières immergées (IBM, pour Immersed Boundary Methods), proposées par Peskin dès 1972, peuvent être vues comme une classe de méthodes intermédiaires entre les deux approches évoquées plus haut. Les solides sont immergés dans le fluide sans qu'il soit nécessaire d'appuyer un maillage du fluide sur ces solides, mais il sont suivis de manière lagrangienne à l'aide de marqueurs advectés par le fluide.

Pour une revue assez complète de ces différentes méthodes on se référera au livre récent de T. Richter [119] pour les méthodes ALE et Eulériennes, et à l'article de revue [93] pour les méthodes de frontière immergée.

L'objet du présent livre est de décrire des modélisations eulériennes de l'interaction fluide-structure s'appuyant sur des fonctions Level Set. Les méthodes Level Set sont bien connues depuis les ouvrages de Sethian [125] et Osher [111] pour le traitement d'images et le calcul d'écoulements multi-phasiques. Plus récemment, elles ont été aussi utilisées dans le contexte de l'optimisation de forme [4]. Ces méthodes permettent le suivi implicite d'interfaces lagrangiennes (avec des champs d'advection physiques pour les écoulements multiphasiques ou virtuels pour le traitement d'images ou l'optimisation de forme) par résolution d'équations aux dérivées partielles de transport.

Depuis une dizaine d'années, un certain nombre de travaux, notamment par les auteurs de cet ouvrage, permettent de les utiliser pour modéliser les forces résultant de déformations de solides élastiques ou pour traiter des contacts entre objets et permettre de faire des calculs d'interaction fluide-structure dans un cadre eulérien. Ce livre reprend ces différents travaux. Son objectif est de décrire les modèles et non pas les méthodes de discrétisation numérique, sauf pour ce qui concerne les discrétisations en temps explicite ou implicite qui impactent la stabilité des modèles. De fait, un des intérêts des méthodes eulériennes est qu'elles permettent d'utiliser des méthodes conventionnelles en dynamique des fluides (différences finies, volumes finis ..) sans faire intervenir de questions spécifiques au couplage avec les structures solides. Dans cet ouvrage, les techniques de discrétisation spatiale utilisées ne sont évoquées que brièvement pour décrire les illustrations numériques.

Le plan du livre est le suivant. Dans le chapitre 1 nous faisons des rappels sur les techniques de capture ou de suivi d'interface. Nous montrons notamment comment utiliser des fonctions Level Set pour traduire de manière volumique des forces surfaciques, ce qui est évidemment un point central dans ces méthodes, et nous précisons comment ces méthodes permettent en dimension deux et trois de rendre compte des courbures. Nous développons les exemples de méthodes Level Set évoqués précédemment en traitement d'image et pour les écoulements multiphasiques, et nous abordons les questions de stabilité en méthodes Level Set dans l'exemple du traitement des termes de tension superficielle, questions qui seront reprises dans le chapitre 3. Le chapitre 2 complète les rappels du chapitre 1 par des notions de calcul différentiel sur les trajectoires dans les descriptions lagrangiennes et eulériennes. Les lois de conservation dans ces descriptions sont aussi rappelées.

Le chapitre 3 traite du premier exemple d'interaction fluide-structure, celui d'une membrane élastique immergée dans un fluide incompressible, d'abord dans le cas d'une membrane réagissant à la variation d'aire puis dans le cas général d'une membrane réagissant aussi au cisaillement. Il évoque aussi le cas des courbes élastiques immergées dans un espace de dimension 3.

Ce chapitre contient enfin un exemple de code écrit en FreeFEM++ pour permettre au lecteur d'expérimenter lui-même ces méthodes. Le chapitre 4 généralise l'approche Level Set aux corps élastiques quelconques, avec une distinction entre les cas de milieux fluide-structure complètement compressibles ou incompressibles.

Le chapitre 5 traite le cas de solides rigides, ou déformables sous l'action de forces extérieures prescrites. Dans ces cas l'interaction fluide-structure est traitée par méthode de pénalisation. Le chapitre 6 s'intéresse au traitement par méthodes Level Set des contacts entre objets, que ces objets soient élastiques ou rigides. Nous décrivons en particulier un algorithme rapide pour le traitement de contacts multiples. Enfin une annexe détaille certains éléments techniques de calcul différentiel, donne la démonstration de certains résultats utilisés dans le livre et des éléments sur les méthodes classiques de différences finies pour la résolution des équations de transport.

Les chapitres 3 à 6 sont largement indépendants les uns des autres. Les chapitres 2 et 4 contiennent les éléments de mécanique des milieux continus (solides et fluides) nécessaires à la compréhension de l'ouvrage de manière à le rendre accessible à des étudiants de Master en analyse numérique.

Pour compléter cet ouvrage, un site internet¹ regroupe diverses ressources documentant les méthodes qui y sont exposées, tels que des codes de mise en oeuvre dans des cas simples ou des animations graphiques.

Pour terminer cette introduction, un point sur la terminologie. Bien que des termes comme *Ensembles de niveau*, voire *Surfaces Implicites*, auraient pu convenir, nous utilisons tout au long de ce livre l'anglicisme *Level Set* car c'est le terme qui est couramment utilisé, y compris en langue française. Nous espérons que lectrices et lecteurs ne nous tiendront pas rigueur de cet abus de langage.

1. <http://level-set.imag.fr>

Table des matières

1	Méthodes Level Set et interfaces lagrangiennes	1
1.1	Capture ou suivi d'interfaces	1
1.2	Méthodes Level Set et géométrie des surfaces	4
1.3	Méthodes Level Set et géométrie des courbes de \mathbb{R}^3	7
1.4	Expression de forces de surface au moyen de fonction Level Set	10
1.4.1	Exemple 1 : traitement d'images	14
1.4.2	Exemple 2 : tension superficielle	16
1.5	Aspects numériques I : consistance et précision	19
1.5.1	Redistanciation de φ	21
1.5.2	Renormalisation de φ	22
1.5.3	Comparaison des deux approches	23
1.6	Aspects numériques II : stabilité	26
1.6.1	Schéma explicite	29
1.6.2	Schéma implicite	31
1.6.3	Schéma semi-implicite	33
2	Outils mathématiques pour la mécanique des milieux continus	37
2.1	Caractéristiques et flots associés à un champ de vitesse	37
2.2	Changements de variables	41
2.3	Formules de Reynolds	44
2.4	Conservation de la masse	47
2.4.1	Conservation de la masse en eulérien	47
2.4.2	Conservation de la masse en lagrangien	47
2.5	Conservation de la quantité de mouvement	48
2.5.1	Conservation de la quantité de mouvement en eulérien	48
2.5.2	Conservation de la quantité de mouvement en lagrangien	48
3	Interaction d'un fluide incompressible avec une membrane élastique	51
3.1	De la méthode de frontière immergée aux méthodes Level Set	52

3.2	Membrane immergée : cas sans cisaillement	55
3.2.1	Formulation Level Set de la déformation élastique d'une hypersurface immergée dans un fluide incompressible	55
3.2.2	Formulation Level Set de l'énergie élastique et couplage fluide-structure dans le cas incompressible	59
3.2.3	Généralisation aux écoulements compressibles	62
3.2.4	Prise en compte des forces de courbures	63
3.2.5	Existence de solutions et modèles de Korteweg	65
3.3	Membrane immergée : cas avec cisaillement	68
3.3.1	Approche Level Set pour les surfaces	68
3.3.2	Un tenseur eulérien pour mesurer les déformations surfaciques	69
3.3.3	Invariants et force élastique associée	70
3.3.4	Energie et modèle de couplage	74
3.4	Courbe immergée dans \mathbb{R}^3	75
3.4.1	Un tenseur eulérien pour mesurer les déformations linéiques	76
3.4.2	Invariants et force élastique associée	77
3.5	Schémas numériques explicites et semi-implicites en temps	78
3.5.1	Schéma explicite	78
3.5.2	Schéma semi-implicite	79
3.5.3	Validation numérique	80
3.6	Illustrations numériques et exemples de codes de calcul	83
3.6.1	Membrane sans cisaillement	84
3.6.2	Membrane avec cisaillement	88
4	Corps solides immergés dans un fluide : le cas des solides élastiques	97
4.1	Matériaux hyperélastiques en formulation lagrangienne	98
4.1.1	Principe d'indifférence matérielle	99
4.1.2	Matériaux isotropes	100
4.1.3	Calcul du tenseur des contraintes en Lagrangien	101
4.2	Matériaux hyperélastiques en formulation eulérienne	102
4.2.1	Calcul du tenseur des contraintes en Eulerien	102
4.2.2	Lois de comportement élastiques	103
4.2.3	Elasticité eulérienne en incompressible	104
4.2.4	Elasticité eulérienne en compressible	105
4.3	Modèle de couplage fluide / structure élastique en incompressible	106
4.3.1	Modèle et loi constitutive en incompressible	107
4.3.2	Illustrations numériques	108
4.4	Modèle de couplage fluide / structure élastique en compressible	117
4.4.1	Modèle et loi constitutive en compressible	118
4.4.2	Schéma numérique	120

4.4.3	Illustrations numériques	122
5	Corps solides immergés dans un fluide incompressible : le cas des solides rigides	125
5.1	La méthode de pénalisation pour un solide de vitesse donnée	126
5.2	Le cas d'un solide rigide en interaction avec le fluide	126
5.3	Remarques sur la mise en oeuvre numérique	129
5.4	Extensions de la méthode de pénalisation	131
5.5	Illustrations numériques	132
6	Calculs d'interactions entre solides par méthode Level Set	143
6.1	Traitement par méthode Level Set des forces d'interaction	144
6.1.1	Modèle de répulsion ponctuel	144
6.1.2	Répulsion surfacique par méthode Level Set	145
6.1.3	Prise en compte de forces de cohésion et d'amortissement	146
6.1.4	Illustrations numériques	147
6.2	Une méthode efficace pour traiter les contacts entre multiples objets	150
6.2.1	Motivation	150
6.2.2	L'algorithme	150
6.2.3	Efficacité de la méthode	156
6.2.4	Illustrations numériques	157
7	Annexe	163
7.1	Exemples de calcul de la courbure avec une fonction Level Set	163
7.2	Justification des résultats utilisés pour les membranes avec cisaillement	164
7.2.1	Preuves des résultats concernant l'invariant Z_1	165
7.2.2	Illustrations analytiques pour Z_2	169
7.3	Justification des résultats utilisés pour les courbes paramétrées dans \mathbb{R}^3	173
7.3.1	Preuves des résultats concernant l'invariant Z_3	174
7.3.2	Formules de l'aire et de la co-aire	176
7.3.3	Approximation volumique d'intégrales linéiques et calcul de la force élastique	178
7.4	Schémas WENO pour l'équation de transport	182
7.5	Quelques pistes pour aller plus loin	184
	Crédits des figures reproduites avec permission	189
	Littérature	191