

---

# Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles

*optima locaux et rapport différentiel*

Jérôme Monnot  
Vangelis T. Paschos  
Sophie Toulouse

 hermes

Lavoisier

---

174  
**IST 2797**

Approximation polynomiale  
des problèmes NP-difficiles

## REMERCIEMENTS

Un livre, avant d'être édité, a déjà vécu une longue histoire. L'histoire de celui-ci, ce sont des travaux de recherche qui ont inspiré le travail de thèse de Sophie Toulouse ; c'est l'encouragement à faire de ce travail un ouvrage à part entière, la finalisation d'un manuscrit en vue de son édition. Pour toutes ces étapes, nous tenons à remercier celles et ceux qui nous ont permis d'avancer.

Nous pensons tout d'abord à Lalo Fernandez de la Vega qui est à l'initiative de cet ouvrage : il nous a donné l'envie, le souffle et l'enthousiasme de le faire. Nous pensons aussi à Giorgio Ausiello dont les recherches et les réflexions ont nourri nos propres recherches. Nous pensons également à la participation de Cristina Bazgan, à celle de Jean-Xavier Rampon et, bien évidemment, à l'accompagnement de tous les jours de Dominique Champ-Brunet pour la documentation, mais aussi le sourire et la décontraction. Enfin, merci aux maîtres du LaTeX Stratos Paschos et Denis Bouyssou pour leur disponibilité et le précieux secours qu'ils nous ont porté. Enfin l'essentiel : la discipline et tous ceux qui ont concouru et concourent encore à la présenter et l'enrichir.

Un livre, après son édition, commence sa véritable vie ; nous remercions les lecteurs, qui, nous l'espérons, trouveront intérêt à sa lecture : c'est à eux qu'il revient de donner une âme à cet ouvrage.

© LAVOISIER, 2003

LAVOISIER

11, rue Lavoisier

75008 Paris

Serveur web : [www.hermes-science.com](http://www.hermes-science.com)

ISBN 2-7462-0597-1

---

Catalogage Electre-Bibliographie

Monnot, Jérôme\*Paschos, Vangelis T.† Toulouse, Sophie

Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles : optima locaux et rapport différentiel

Paris : Hermès Science Publications, 2003

ISBN 2-7462-0597-1

RAMEAU : approximation, théorie de l'

DEWEY : 515 : Analyse mathématique

---

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

# Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles

*optima locaux et rapport différentiel*

Jérôme Monnot  
Vangelis T. Paschos  
Sophie Toulouse



**hermes**  
**Science**  
— PUBLICATIONS —

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

7714

## Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	9
<b>Chapitre 1. Introduction</b> . . . . .	17
<b>Chapitre 2. L'approximation polynomiale</b> . . . . .	21
2.1. Les problèmes . . . . .	21
2.1.1. Qu'est-ce qu'un problème de NPO ? . . . . .	21
2.1.2. Définitions indispensables . . . . .	23
2.2. Leur résolution . . . . .	23
2.2.1. La mission de l'approximation polynomiale . . . . .	26
2.2.2. Son arme . . . . .	27
2.3. L'évaluation de leurs algorithmes . . . . .	27
2.3.1. Fer de lance de l'approximation polynomiale : le rapport classique . . . . .	27
2.3.2. Une alternative : le rapport différentiel . . . . .	28
2.3.3. L'erreur . . . . .	29
2.4. Degrés d'approximation . . . . .	30
2.4.1. Approximation à rapport constant $r_0$ . . . . .	30
2.4.2. Approximation à $r$ , $r$ aussi proche de 1 que l'on veut . . . . .	32
2.5. Définition logique . . . . .	35
2.5.1. Les classes MaxNP et MaxSNP . . . . .	36
2.5.2. Logique et approximation . . . . .	38
2.6. Effets de classe . . . . .	41
2.6.1. Le principe de réduction . . . . .	41
2.6.1.1. Réduction polynomiale . . . . .	41
2.6.1.2. Réduction préservant l'optimalité . . . . .	42
2.6.1.3. Réduction préservant l'approximation . . . . .	43
2.6.2. La notion de complétude . . . . .	46
2.6.3. La fermeture . . . . .	47

2.7. Affinité entre problèmes . . . . .	47
2.7.1. Réductions continues . . . . .	47
2.7.2. Réductions affines . . . . .	50
2.8. Voyageur de commerce et affinité . . . . .	54
2.8.1. Le cas métrique . . . . .	55
2.8.2. Ses cousins . . . . .	55
2.8.3. Le cas bivalué . . . . .	56
2.8.4. Le cas général . . . . .	57
2.9. Conclusion . . . . .	58
<b>Chapitre 3. Optimum local garanti . . . . .</b>	<b>61</b>
3.1. Quelques concepts . . . . .	61
3.1.1. Qu'est-ce qu'un algorithme de recherche locale ? . . . . .	61
3.1.1.1. LSA – algorithme de recherche locale . . . . .	62
3.1.1.2. Complexité d'un LSA . . . . .	63
3.1.1.3. Conditions nécessaires et conditions suffisantes de polyno- mialité . . . . .	63
3.1.2. Voisinages $h$ -bornés . . . . .	65
3.2. Les classes $GLO[R]$ . . . . .	68
3.3. Exemples simples pour voisinages 1-bornés . . . . .	69
3.4. Limite des voisinages $h$ -bornés . . . . .	72
3.5. Réductions préservant l'approximation locale . . . . .	73
3.5.1. Préserver le voisinage . . . . .	74
3.5.1.1. La LOC-réduction . . . . .	74
3.5.1.2. La LOC'-réduction . . . . .	77
3.5.2. La réduction dans $GLO[R]$ . . . . .	79
3.5.3. Exemples . . . . .	80
3.6. $GLO$ et associés première partie . . . . .	82
3.6.1. Voisinages miroirs et classe $CGLO[R]$ . . . . .	82
3.6.2. Optima altérés et $GGLO[R]$ . . . . .	84
3.6.3. Mixage ou $GCGLO[R]$ . . . . .	84
<b>Chapitre 4. Problèmes dans <math>GLO</math> et <math>GLO[\delta]</math> . . . . .</b>	<b>85</b>
4.1. Des voisinages 1- et 2-bornés . . . . .	85
4.1.1. Couverture d'ensembles . . . . .	88
4.1.2. Ensemble minimum d'arêtes retour . . . . .	92
4.1.3. Couplage maximum dans un hypergraphe . . . . .	93
4.1.4. Les problèmes d'ordonnancement . . . . .	94
4.1.5. Le problème de sous-graphe partiel maximum libre de $H_0$ . . . . .	95
4.1.6. Ensemble minimum de sommets retour . . . . .	98
4.2. Exemples pour les voisinages 3-bornés et plus . . . . .	99
4.2.1. Retour sur le problème de sous-graphe partiel maximum libre de $H_0$ . . . . .	99

4.2.2. Le voyageur de commerce et le voisinage 2-opt . . . . .	104
4.3. Résultats négatifs . . . . .	107
4.3.1. Satisfaisabilité maximum . . . . .	107
4.3.2. Le sac-à-dos . . . . .	108
4.4. Où les classes GLO[R] se situent-elles ? . . . . .	110
4.4.1. GLO[R] et les classes d'approximation . . . . .	110
4.4.2. GLO[R] et les classes logiques . . . . .	115
4.4.3. Quelle unité dans tout ça ? . . . . .	117
4.5. Conclusion . . . . .	117

## Chapitre 5. Les problèmes de satisfaisabilité . . . . . 121

5.1. Les problèmes de satisfaisabilité entre eux . . . . .	121
5.1.1. Présentation . . . . .	121
5.1.2. Tous pour un . . . . .	124
5.2. GLO et associés deuxième partie . . . . .	126
5.3. Déclinaison des problèmes de satisfaisabilité maximum en GLO . . . . .	128
5.3.1. Une opposition de plus entre rapports classique et différentiel . . . . .	128
5.3.2. MaxSat et CGLO . . . . .	129
5.3.3. Max $k$ -Sat et GLO . . . . .	129
5.3.4. Max $k$ -Sat et CGLO . . . . .	131
5.3.5. MaxNAE $k$ -Sat et GLO . . . . .	132
5.3.6. Max $k$ -Sat et GCGLO . . . . .	133
5.4. Les problèmes de satisfaction de contraintes conjonctives . . . . .	134
5.4.1. Un problème difficile . . . . .	134
5.4.2. Vers le 1/4 différentiel . . . . .	138
5.4.3. Approximation à 1/3 . . . . .	141
5.5. Limites de l'approche GLO . . . . .	142
5.5.1. 1/3, le meilleur de CGLO pour Max2-CCSP . . . . .	142
5.5.2. 1/5, le meilleur espoir de CGLO[ $\delta$ ] pour Max2-CCSP . . . . .	145
5.5.3. 1/2, le meilleur de GLO pour MaxNAE2-Sat . . . . .	146
5.5.4. 1/3, le meilleur espoir de GLO[ $\delta$ ] pour MaxNAE2-Sat . . . . .	147
5.6. Conclusion . . . . .	148

## Chapitre 6. Réductions . . . . . 149

6.1. Dans les graphes et les hypergraphes (systèmes d'ensembles) . . . . .	149
6.1.1. Régularisation pour la couverture d'ensembles . . . . .	150
6.1.2. Dépondération pour la couverture d'ensembles . . . . .	151
6.1.3. Dépondération pour la couverture de sommets . . . . .	154
6.1.4. Autres problèmes simples dans les graphes . . . . .	156
6.2. Les problèmes de logique . . . . .	157
6.2.1. Autour de MinEQ . . . . .	157
6.2.2. Autour de MaxNAESat . . . . .	161
6.2.3. Dense ou pas dense ? . . . . .	164



6.3. Conclusion . . . . .	170
6.3.1. Un certain goût d'inachevé . . . . .	170
6.3.2. Synthèse . . . . .	170
<b>Chapitre 7. En-deçà de GLO</b> . . . . .	173
7.1. La classe PLS des problèmes de recherche locale . . . . .	173
7.1.1. De la difficulté de détermination des optima locaux . . . . .	174
7.1.1.1. Quelques notions indispensables . . . . .	174
7.1.1.2. Le graphe de transition . . . . .	175
7.1.2. Approximation des optima locaux . . . . .	177
7.2. Les problèmes radiaux . . . . .	178
7.2.1. Qu'est-ce que radial ? . . . . .	179
7.2.2. Les problèmes $\tau$ -radiaux . . . . .	182
7.2.2.1. Définition et exemples . . . . .	183
7.2.2.2. Problèmes $\tau$ -radiaux et optima locaux . . . . .	185
7.2.3. Une sous-famille remarquable . . . . .	186
7.2.3.1. Les problèmes réguliers . . . . .	186
7.2.3.2. Les problèmes héréditaires et anti-héréditaires . . . . .	188
7.2.3.3. Les problèmes de partitionnement héréditaire . . . . .	190
7.3. Conclusion . . . . .	190
<b>Annexes</b> . . . . .	191
A. Problèmes rencontrés . . . . .	191
A.1. Problèmes dans les graphes . . . . .	192
A.2. Problèmes de programmation linéaire . . . . .	197
A.3. Problèmes de logique . . . . .	198
A.4. Autres problèmes . . . . .	201
B. Définitions . . . . .	203
B.1. Les fondements . . . . .	203
B.2. Les classes . . . . .	205
B.2.1. Classes d'approximation . . . . .	205
B.2.2. Classes définies par la logique . . . . .	205
B.2.3. Classes d'approximation locale . . . . .	206
B.3. Réductions . . . . .	207
B.3.1. Propriétés remarquables . . . . .	207
B.3.2. Réductions remarquables . . . . .	208
B.4. Localité . . . . .	210
B.5. Problèmes particuliers . . . . .	210
<b>Bibliographie</b> . . . . .	213
<b>Index</b> . . . . .	219