

COLLECTION
LE COURS
DE MATHEMATIQUE

CENTRE D'ETUDES
ET DE RECHERCHES
EN INFORMATIQUE

P. QUITTARD PINON
F. LIGNELET

ELEMENTS DE STATISTIQUES SERIES CHRONOLOGIQUES SCALAIRES



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger) 1983

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$\cos x,$$

$$+$$

$$\Delta y_i,$$

$$\leq$$

$$\sin x$$

$$\Phi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$=$$

$$y''$$

$$x$$

$$0$$

$$(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$\cos x,$$

$$+$$

$$\Delta y_i,$$

$$\leq$$

$$\sin x$$

$$\Phi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

**ELEMENT DE STATISTIQUE
SERIE CHRONOLOGIE SALAIRE**

P. QUTTARD PINON

**CENTRE D'ETUDES ET DE RECHERCHES
EN INFORMATIQUE**



Office des Publication Universitaires

L'Algerie

1983

6757

INTRODUCTION

Ce polycopié reprend un cours que nous enseignons depuis 1977-1978 à des élèves ingénieurs de 4^{ème} année du Centre d'Etudes et de Recherche en Informatique (C.E.R.I.). On a dit et ceci a été repris par un mathématicien illustre * qu'il n'y avait pas de mathématiques sans larmes. A voir parfois plus d'un découragement se faire jour, nous serions tentés de croire qu'il en va de même de l'étude statistique des chroniques et pourtant en lui même le sujet ne manque pas d'attrait car son objet ultime, la prévision, est au coeur de bien des interrogations.

Au delà de cette évocation et de façon plus prosaïque, la recherche de bonnes prévisions est indispensable dans de nombreux domaines. Citons cà et là : la gestion des stocks, la stratégie des ventes, la régulation de la production. Mais enfin de ne pas égarrer le lecteur disons tout de suite que ce cours n'est pas axé sur la prévision en général, tout au plus peut-il fournir des techniques mathématiques permettant dans certains cas et sous certaines conditions une prédiction, quasi automatique, de valeurs futures sur un horizon relativement court, encore faudra-t-il s'informer du contexte de la série et tenir compte éventuellement d'éléments non quantifiables.

N'oublions pas que pour importante qu'elle soit la prévision n'est pas l'unique but de l'analyse des séries temporelles ; la recherche d'éventuelles périodicités, l'obtention de bonnes techniques de désaisonnalisation, outil indispensable dans les études de conjoncture sont également des objectifs importants que se fixe le statisticien.

Nous nous intéressons essentiellement à des séries scalaires c'est à dire des suites de valeurs numériques unidimensionnelles indicées par le temps. Nous admettons véritable acte de foi, que ces valeurs passées contiennent suffisamment d'information pour nous renseigner sur le comportement profond de cette série en dégagant l'essentiel du contingent, que cette information est aussi suffisamment riche pour permettre l'extrapolation : "Le passé est une incantation de la chose à venir, sa nécessaire différence génératrice, la somme sans cesse croissante des conditions du futur" disait Paul Claudel.

Pour aborder l'étude des chroniques deux approches sont concevables : ou bien l'on effectue une étude descriptive détaillée, souvent commode dans le cas des séries à effets saisonniers, cette description suggère souvent des modèles simples, ou bien l'on adopte un point de vue dynamique, on essaye alors de comprendre comment on passe d'une observation à la suivante. La première approche est très traditionnelle, nous lui avons consacré le chapitre III, la seconde approche est plus récente, nous lui avons consacré les chapitres IV à IX en suivant la théorie de BOX et JENKINS qui, à l'heure actuelle, nous paraît être la plus solidement fondée, nous attirons à cette occasion l'attention du lecteur sur l'absence d'ouvrage en français sur cette méthode.

* Laurent SCHWARTZ, avant propos de son cours de mathématiques à l'Ecole Polytechnique.

Ces deux approches trouvent cependant une certaine unité par l'utilisation d'outils communs : opérateurs et surtout équations aux différences auxquels nous avons consacré un chapitre préliminaire.

Mathématiquement la seule représentation cohérente des chroniques est fournie par les processus stochastiques, malheureusement leur étude rigoureuse pose des problèmes mathématiques très difficiles et les connaissances nécessaires pour les résoudre exigent, pour les acquérir, un investissement intellectuel considérable sans commune mesure avec les résultats pratiques qu'ils fournissent et qui seuls nous intéressent ici. Aussi avons nous préféré sacrifier un peu de mathématique rigueur au profit des idées et des méthodes. Le chapitre II n'est qu'une simple introduction à l'étude des fonctions aléatoires ou processus.

Malgré tout, ce cours exige l'effort mais nous sommes convaincus qu'avec un minimum de travail le lecteur obtiendra un maximum de récompense aussi nous lui souhaitons le courage nécessaire et nous lui serions reconnaissants de nous signaler les points qu'il jugera difficiles ou obscurs ainsi que toute erreur qu'il pourrait déceler.

Enfin terminons cette introduction en proposant quelques guides de lecture ainsi que quelques indications sur les notations utilisées.

Pour une bonne assimilation de ce cours, nous engageons vivement le lecteur à nous suivre avec stylo et feuilles de papier. Nous lui recommandons ensuite de se livrer à une lecture séquentielle, trop linéaire pour être profitable. Le premier chapitre, par exemple, ne devrait être lu qu'au fur et à mesure des besoins. Certains passages peuvent être sautés sans inconvénient en première lecture, c'est notamment le cas : de la démonstration p. 16 (chapitre II), des pages 33 à 34 ainsi que de la section d) du chapitre III, des paragraphes 5 et 6 du chapitre VI, 3 et 4 du chapitre VII, 3 et 4 du chapitre VIII.

Les notations et symboles utilisés sont ceux que l'on rencontre habituellement en calcul des probabilités, sujet supposé connu du lecteur, nous avons noté par le signe $\sim$ (sauf mention contraire) l'opération de transposition des matrices, le signe $\| \quad \|$ indique la norme, $\langle , \rangle$ le produit scalaire. Généralement les lettres grecques minuscules sont réservées aux paramètres réels, $N(a, b)$ désigne une loi normale de moyenne a et d'écart type b .

TABLE DES MATIERES

	Pages
CH. I <u>ELEMENTS FONDAMENTAUX DE L'ETUDE DES CHRONIQUES DISCRETES</u>	1
I/I LES OPERATEURS DISCRETS	
(I,a) L'opérateur de retard B	1
(I,b) L'opérateur d'avance F	2
(I,c) L'opérateur de différence ∇	2
(I,d) L'opérateur de Sommation S	3
I/II EQUATIONS LINEAIRES AUX DIFFERENCES	5
(II,a) Forme des solutions	5
(II,b) Calcul de la fonction complémentaire	6
(II,c) Exemple	7
(II,d) Forme de l'intégrale particulière	8
I/III TRANSFORMEE EN Z D'UNE SUITE	8
(III,a) Définition	8
(III,b) Propriétés de la transformée en Z	9
(III,c) Originale d'une transformée en Z	10
(III,d) Transformée en Z et équations aux différences	11
CH. II <u>NOTIONS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES</u>	13
II/I GENERALITES SUR LES PROCESSUS	13
(I,a) Recherche d'un cadre théorique	13
(I,b) Loi temporelle et moments	14
(I,c) Exemples de Processus	15
(I,d) Etude de la fonction d'autocovariance	16
II/II REPRESENTATION SPECTRALE DES PROCESSUS	17
(II,a) Approche utilisant le théorème de Bochner	17
(II,b) Définition d'un bruit blanc	18
(II,c) Approche par le périodogramme	18

II/III PROBLEMES D'ESTIMATION	20
(III,a) Estimation des deux premiers moments	21
(III,b) Estimation spectrale	21
CH. III <u>L'ETUDE TRADITIONNELLE DES CHRONIQUES</u>	24
III/I DESCRIPTION DES SERIES CHRONOLOGIQUES	24
(I,a) L'ajustement par moindres carrés	24
(I,b) Décomposition traditionnelle	25
III/II LA REGRESSION PAR LA METHODE DE BUYS-BALLOT	26
III/III LE LISSAGE DES CHRONIQUES	28
(III,a) Définition	28
(III,b) Les moyennes mobiles	28
(III,c) Le lissage exponentiel	34
III/IV LA DESAISONNALISATION	35
(IV,a) Généralités	35
(IV,b) Utilisation des moyennes mobiles	36
III/V LA PREVISION	37
(V,a) Utilisation du filtre de Buys-Ballot	37
(V,b) Utilisation des moyennes mobiles	37
(V,c) Utilisation du lissage exponentiel	37
(V,d) Utilisation de filtrage optimal	37
III/VI LE CONTROLE DE LA PREVISION	39
(VI,a) Les sommes cumulées	39
(VI,b) Le clignotant de Trigg	40
ANNEXE : PROGRAMMES DE DESAISONNALISATIONS	41
ANNEXE : LE PROGRAMME CHRONO	43

CH. IV	<u>LES PROCESSUS LINEAIRES STATIONNAIRES</u>	44
IV/I	PROCESSUS LINEAIRE GENERAL	44
	(I,a) Définition	44
	(I,b) Autocovariance d'un processus linéaire	45
	(I,c) Fonction génératrice d'autocovariance	45
	(I,d) Conditions de stationnarité et d'inversibilité	46
IV/II	LES PROCESSUS AUTO-REGRESSIFS D'ORDRE p	47
	(II,a) Définition	47
	(II,b) Fonction d'autocorrelation	47
	(II,c) Fonction d'autocorrelation partielle	49
	(II,d) Le spectre	50
	(II,e) Le processus AR(1)	50
	(II,f) Le processus AR(2)	51
IV/III	LES PROCESSUS EN MOYENNE MOBILE	53
	(III,a) Définition	53
	(III,b) Fonction d'autocorrelation	53
	(III,c) Le spectre	54
	(III,d) Le processus MM(1)	54
	(III,e) Le processus MM(2)	55
IV/IV	LES PROCESSUS MIXTES	56
	(IV,a) Définition	56
	(IV,b) Fonction d'autocorrelation	56
	(IV,c) Le processus ARMMI(1,1)	57
CH. V	<u>LES PROCESSUS MIXTES INTEGRES</u>	58
V/I	DEFINITION ET GENERALITES	58
	(I,a) Forme inverse	58
	(I,b) En fonction des a_{t-j}	59
	(I,c) Forme d'équations aux différences	59
	(I,d) Exemple	60

V/II	LES PROCESSUS INTEGRE EN MOYENNE MOBILE	61
(II,a)	Forme inverse	61
(II,b)	Fonction des a_{t-j}	61
(II,c)	Forme d'équations aux différences	62
(II,d)	Le processus MMI(0,1,1)	62
(II,e)	Le processus MMI(0,2,2)	63
CH.VI	<u>LA PREVISION DES SERIES NON SAISONNIERES</u>	66
VI/I	MEILLEURE PREVISION EN MOYENNE QUADRATIQUE	66
(I,a)	Recherche de la meilleure prevision	66
(I,b)	Trois formes fondamentales pour la prévision	67
(I,c)	Exemple	68
VI/II	CALCULS ET MISE A JOUR DES PREVISIONS	68
(II,a)	Calcul des Ψ	68
(II,b)	Mise à jour	69
(II,c)	Intervalle de confiance	69
VI/III	LE PREDICTEUR ET LES COEFFICIENTS DE PREVISION	70
(III,a)	Opérateur d'autoregression	70
(III,b)	Rôle de l'opérateur moyenne mobile	70
(III,c)	Coefficients de prévision	71
VI/IV	EXEMPLES	72
(IV,a)	Le processus MMI(0,1,1)	72
(IV,b)	Le processus MMI(0,2,2)	73
(IV,c)	Le processus MMI(0,d,q)	74
(IV,d)	Le processus ARMMI(p,d,o)	74
(IV,e)	Etude du ARMMI(1,o,1)	74
(IV,f)	Le processus ARMMI(1,1,1)	75
VI/V	CORRELATIONS ENTRE ERREURS DE PREVISION	76
(V,a)	Origine distinctes	76
(V,b)	Horizons distincts	77
VI/VI	DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE PREVISIONS	77

CH. VII	<u>L'IDENTIFICATION DES PROCESSUS LINEAIRES NON SAISONNIERS</u>	79
VII/I	TECHNIQUES D'IDENTIFICATION	80
	(I,a) Ordre de l'opérateur de différence	80
	(I,b) Détermination de p et q	80
	(I,c) Estimation des fonctions d'autocorrélations	82
	(I,d) Ecart-type de ces fonctions	82
VII/II	VALEURS INITIALES : LES CAS SIMPLES	82
	(II,a) Processus en moyenne mobile	82
	(II,b) Processus auto-regressifs	83
VII/III	VALEURS INITIALES : METHODE GENERALE	83
VII/IV	LA MULTIPLICITE DES MODELES	85
	(IV,a) Etude générale	85
	(IV,b) Etude des paramètres en moyenne mobile	86
	(IV,c) Utilisation de la représentation arrière	87
CH.VIII	<u>L'ESTIMATION DES PROCESSUS LINEAIRES NON SAISONNIERS</u>	88
VIII/I	ESTIMATION PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE	88
	(I,a) Fonction de vraisemblance pour un MM(q)	88
	(I,b) Généralisation aux processus mixtes	91
VIII/II	LA RESOLUTION NUMERIQUE	91
	(II,a) Calculs conditionnels	92
	(II,b) Calculs inconditionnels	92
VIII/III	ESTIMATION NON LINEAIRE	94
	(III,a) Le problème	94
	(III,b) Interprétation des $[a_t/\hat{\phi}, \hat{\theta}, w]$	97-98
VIII/IV	LA PRECISION DE L'ESTIMATION	97-98

CH. IX LA VERIFICATION

IX/I L'ANALYSE DES RESIDUS	101
(I,a) Test de Box et Pierce	101
(I,b) Test du périodogramme	102
IX/II LA MODIFICATION DU MODELE	103
(II,a) Le sur-ajustement	103
(II,b) Utilisation des résidus	103

CH. X LES MODELES SAISONNIERS

	105
--	-----

X/I LE MODELE $(p,d,q)(P,D,Q)S$	105
X/II ETUDE DU MODELE $(o,1,1) \times (o,1,1)_{12}$	106
(II,a) Définition	106
(II,b) La prévision	106
(II,c) Identification et estimation préliminaire	107
(II,d) L'estimation	108
(II,e) La vérification	109

ANNEXE : TABLES POUR DIFFERENTS PROCESSUS	110 à 114
---	-----------

CH. XI LA METHODE DE HOLT ET WINTERS

	115
--	-----

XI/I TRAITEMENT DES SERIES SAISONNIERES	115
(I,a) Les formules	115
(I,b) Le modèle de Holt et Winters	115
XI/II TRAITEMENT DES SERIES SAISONNIERES	116
(II,a) Avec effets additifs	116
(II,b) Avec effets multiplicatifs	117
XI/III LA MISE EN OEUVRE	117
(III,a) Valeurs de départ	117
(III,b) Choix des constantes de lissage	117
(III,c) Exemple	119
