BIBLIOTHEQUE DU CERIST

OPTIMISATION
MÉTHODES NUMÉRIQUES

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

COURS D'ANALYSE, par G. CHOQUET. Tome 2 : Topologie. 1973, 2e édition (2e tirage), 332 pages, 7 figures.

COURS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS, par P. GERMAIN. Tome 1. Théorie générale: 1973, 436 pages, 103 figures.

BASES MATHÉMATIQUES DU CALCUL DES PROBABILITÉS, par J. NEVEU. 1970, 2e édition revue et corrigée, 214 pages.

THÉORIE DES PROBABILITÉS ET QUELQUES APPLICATIONS, par P. L. HENNEQUIN et A. TORTRAT. *Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens*. 1965, 458 pages, 14 figures.

MÉCANIQUE CLASSIQUE, par J. J. MOREAU.

Tome 1. Géométrie des masses; Vecteurs liés; Torseurs; Cinématique; Cinétique; Principes et théorémes généraux de la mécanique. 1968, 170 pages, 13 figures.

Tome 2. Lois de forces: Statique et Dynamique de solides; Usage de repères non galiléens. Eléments de mécanique analytique. 1971, 294 pages, 36 figures.

519.3

1059

MAÎTRISE DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS FONDAMENTALES

OPTIMISATION
MÉTHODES NUMÉRIQUES

par

A. AUSLENDER

Maître de Conférences à l'Université de Clermont-Ferrand

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

MASSON
Paris New York Barcelone Milan
1976

259

MASSON S.A. 120 Bd Saint-Germain, Paris-6
MASSON Inc. 111 West 57th Street, New York, N.Y.
TORAY MASSON Balmes 151, Barcelone 8
ETMI Via Settembrini 27, Milan

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© MASSON PARIS 1976

ISBN: 2-225 42 900-6

Imprimé en Hongrie

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

AVANT-PROPOS

Ce livre est destiné avant tout aux praticiens, ingénieurs, économistes, physiciens qui ont besoin de résoudre numériquement des problèmes d'optimisation, de minimax, des jeux à n personnes, des systèmes d'équations algébriques. Le cadre topologique est alors volontairement simple: c'est celui des espaces vectoriels réels de dimension finie munis de la structure euclidienne. Pour le chercheur ou l'enseignant en Mathématiques Appliquées, ce cadre n'est pas restrictif puisque la plupart des idées et méthodes se généralisent assez aisément en dimension infinie et principalement dans les espaces de Hilbert. Pour résoudre les problèmes envisagés une bonne connaissance des outils de base de l'Analyse convexe est recommandée; celle-ci est amenée aujourd'hui à jouer le rôle que l'Analyse linéaire occupait il y a une dizaine d'années. A ce titre, nous recommanderons les livres de Rockafellar [55] et de Laurent [41].

Signalons aussi qu'un lecteur déjà averti du sujet n'aura pas de peine à lire séparément et de façon indépendante les divers chapitres du livre et ce, dans un ordre qui lui est propre. Néanmoins, il est indispensable en ce qui concerne les notations et définitions qu'il se reporte aux paragraphes 1.1 du chapitre I, 1 du chapitre II, 1 du chapitre III et enfin aux remarques 1 et 2 du chapitre IV.

Dans ce livre, on s'est attardé principalement à l'aspect mathématique des choses; toutefois, dans une annexe consacrée aux applications et suivie d'une bibliographie spécifique (la bibliographie générale précédant l'annexe) nous avons tenté, de façon succincte, de montrer comment des cas réels issus de différentes disciplines pouvaient se modéliser en termes d'optimisation.

Je tiens à remercier ici pour les nombreux conseils qu'ils ont bien voulu m'apporter pendant la rédaction de ce livre: Monsieur Laurent, Professeur à l'Université de Grenoble, Monsieur Badrikian, Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand et toute l'équipe d'Analyse Numérique de Clermont-Ferrand, notamment Messieurs Correa, Dang Tran Dac, Gourgand, Guillet, Hiriart-Urruty.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

TABLE DES MATIÈRES

AVANT PROPOS V

CHAPITRE PREMIER. — *Programmation linéaire* 3

1. Polyèdres convexes 3
   1.1. Concepts de base 3
   1.2. Polyèdres convexes 5
2. Forme géométrique de la méthode du simplexe 9
3. Mise en oeuvre de la méthode du simplexe 10
   3.1. Le tableau du simplexe 11
   3.2. Représentation analytique des points extrémaux de P 12
   3.3. Représentation analytique des arêtes de P issues d'un point extrémal simple 14
   3.4. Comportement de la forme linéaire (c, x) sur les arêtes issues d'un point extrémal simple x 15
   3.5. Formules de changement de base 15
   3.6. Mise en oeuvre de la méthode du simplexe lorsque P est sous la forme standard 16

CHAPITRE II. — *Théorie de la dualité* 18

1. Rappels d'analyse convexe 18
   1.1. Convexité 18
   1.2. Semi-continuité inférieure 20
   1.3. Résultats fondamentaux d'analyse convexe 21
2. Théorie de la dualité 25
   2.1. Définition d'un problème dual, lié à une famille de perturbations 25
   2.2. Définition du lagrangien, lié à une famille de perturbations 26
   2.3. Théorèmes de stabilité dans le cas non forcément convexe 26
   2.4. Théorèmes de stabilité dans le cas convexe 29
3. Applications à la programmation convexe 30
4. Applications à la théorie du minimax 33
   4.1. Position du problème 33
   4.2. Correspondances entre les fonctions convexes définies sur un espace produit et les fonctions concaves-convexes 34
   4.3. Théorèmes d'existence dans la théorie des minimax 35

CHAPITRE III. — *Caractérisation des solutions d'un problème d'optimisation* 38

1. Programmation mathématique 38
2. Dérivation et diverses notions de convexité 39
3. Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité 43
4. Existence, unicité des solutions de P, problèmes numériques associés à P 46
   4.1. Existence et unicité des solutions de P 46
   4.2. Problèmes numériques associés à P 47
5. Applications à la théorie minimax : caractérisation des cols de fonctions convexes-concaves 48
   5.1. Propriétés de différentiabilité des fonctions convexes-concaves 48
   5.2. Caractérisation des cols 50

CHAPITRE IV. — *Méthodes de descente* 51

1. Rappels sur la théorie des multi-applications 51
2. Une méthode générale d'optimisation 57
3. Application à la programmation mathématique : Les méthodes de descente 64
   3.1. Le cas sans contrainte : $Y = \mathbb{R}^n$ 64
   3.2. Les cas avec contraintes 65
4. Applications à la théorie du minimax 68
   4.1. Méthodes de descente liées au caractère de jeu à somme nulle des problèmes de col 68
   4.2. Méthodes de descente dans le cas de problèmes de minimax 73

CHAPITRE V. — *Méthodes numériques en programmation convexe non différentiable* 75

1. Projection sur un convexe fermé : recherche d'un point commun à une famille de convexes fermés 76
   1.1. Projection sur un convexe fermé 76
   1.2. Recherche d'un point commun à une famille de convexes fermés 77
2. Méthodes de sous-gradients 80
3. Approximation par une suite de problèmes plus simples 85
   3.1. Description de l'algorithme 85
   3.2. Exemples de choix de φ_n et l 86
   3.3. Autres exemples de choix de D (généralisation de la méthode de Kelley) 88
   3.4. Théorème de convergence 88

CHAPITRE VI. — *Méthodes de décomposition* 91

1. Décomposition sur un espace produit 93
   1.1. Position du problème 93
   1.2. Méthode de décomposition en série 94
   1.3. Méthodes de décomposition en parallèle 97
   1.4. Couplage de la méthode de Gauss-Seidel avec d'autres méthodes d'optimisation 100
2. Méthodes duales de décomposition 106
   2.1. Position du problème 106
   2.2. Quelques propriétés du dual 106
   2.3. Méthodes de sur-gradients 108
   2.4. Méthodes de gradient 108
   2.5. La méthode des colonnes de Dantzig (25) 109
3. Méthodes de décomposition du type paramétrisation 111
   3.1. Présentation du problème 111
   3.2. Dérivées directionnelles des fonctions à valeurs extrémales 112
   3.3. Généralisation de la méthode de Frank-Wolfe modifiée 113

CHAPITRE VII. — *Egalités et inégalités variationnelles* 116

1. Notions fondamentales 116
   1.1. Opérateurs monotones et fortement monotones 116
   1.2. Egalités et inégalités variationnelles 119
   1.3. Théorèmes d'existence et d'unicité 121
2. Résolution d'inégalités variationnelles avec opérateurs multivoques 124
   2.1. Caractérisation des solutions de l'inégalité variationnelle 1.1 124
   2.2. Résolution numérique de l'inégalité variationnelle 1.1 126
3. Méthodes de descente 138
   3.1. Méthodes de descente obtenues à partir du formalisme général du chapitre IV 138
   3.2. Autres méthodes 140
4. Méthodes de pénalisation 147
   4.1. Existence de solutions d'égalités variationnelles sur un ouvert 147
   4.2. Pénalisation intérieure 149
   4.3. Pénalisation extérieure 152
   4.4. Pénalisation mixte 154
5. Méthodes d'accumulation 155
   5.1. Généralisation de la méthode de Zuhovickii, Polyack, Primack 155
   5.2. Généralisation de la méthode de Kelley 156

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE 158

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

ANNEXE. — *Applications dans les sciences exactes et naturelles et en recherche opérationnelle* 161

1. Passage de problèmes d'optimisation dont l'espace de base est de dimension infinie à d'autres dont l'espace de base est de dimension finie 161
   1.0. Position du problème 161
   1.1. Discrétisation de l'équation différentielle : schéma aux différences finies ... 162
   1.2. Résolution numérique approchée d'un problème variationnel P associé à $\tilde{P}$ 163
   1.3. Extensions à divers problèmes 164
2. Applications aux problèmes de mathématiques appliquées 165
   2.1. Applications à l'analyse numérique 165
   2.2. Applications aux probabilités 167
   2.3. Applications aux statistiques 167
   2.4. Applications à l'automatique théorique : identification des systèmes 169
3. Applications à la mécanique 170
   3.1. Optimisation : technique de résolution des équations ou inéquations aux dérivées partielles posées par la mécanique 170
   3.2. Optimisation : utilisation au niveau de la formalisation des problèmes de mécanique 170
4. Applications à la physique 171
   4.1. Lois de l'électromagnétisme 171
   4.2. Problèmes d'équations aux dérivées partielles 171
   4.3. Recherche des valeurs propres en chimie physique quantique 171
5. Applications à la chimie 172
6. Applications à la biologie 173
7. Applications à la recherche opérationnelle 173

BIBLIOGRAPHIE DE L'ANNEXE 174

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES 177

BIBLIOTHEQUE DU CERIST