

FINANCE
ET
ÉCONOMIE APPLIQUÉE

Volume 27

Collection publiée sous la direction de
Henri HIERCHE

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

**PROGRAMMATION
QUADRATIQUE**

Collection FINANCE ET ÉCONOMIE APPLIQUÉE

Sous la direction de H. HIERCHE

Volumes publiés :

1. — H. ARDANT. — *Introduction à l'étude des banques et opérations de banque* (épuisé).
2. — P. DUPONT. — *Le contrôle des banques et la direction du crédit en France*.
3. — B. ÖHLIN. — *La politique du commerce extérieur*.
4. — J. R. HICKS. — *Valeur et capital* (*Enquête sur divers principes fondamentaux de la théorie économique*).
5. — J. LESOURNE. — *Technique économique et gestion industrielle* (2^e édition).
6. — P. MASSÉ. — *Le choix des investissements* (*Critères et méthodes*) (2^e édition).
7. — J. G. KEMENY, J. L. SNELL, G. L. THOMPSON. — *Algèbre moderne et activités humaines* (2^e édition française revue et corrigée).
8. — R. FRISCH (avec la collaboration de L. NATAF). — *Maxima et minima* (*Théorie et applications économiques*).
9. — P. ROSENSTIEHL, A. GHOUILA-BOURI. — *Les choix économiques* (*Décisions séquentielles et simulation*).
10. — J. TINBERGEN. — *Techniques modernes de la politique économique*.
11. — G. TINTNER. — *Mathématiques et statistiques pour les économistes*. Tome I : *Méthodes élémentaires*.
12. — P. GORDON. — *Mathématiques pour les économistes*. — *Méthodes avancées* (à paraître prochainement).
13. — J. MOTHE. — *Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise* (2^e édition).
14. — R. FRISCH. — *Les lois techniques et économiques de la production*.
15. — L. V. KANTOROVITCH. — *Calcul économique et utilisation des ressources*.
16. — E. MALINVAUD. — *Méthodes statistiques de l'économétrie*.
17. — J. G. KEMENY, A. SCHLEIFER, J. L. SNELL, G. L. THOMPSON. — *Les mathématiques modernes dans la pratique des affaires*.
18. — R. BELLMAN et S. E. DREYFUS. — *La programmation dynamique et ses applications*.
19. — J. DESROUSSEAUX. — *L'évolution économique et le comportement industriel*.
20. — S. CH. KOLM. — *Les choix financiers et monétaires* (*Théorie et technique modernes*).
21. — Y. MAINGUY. — *L'économie de l'énergie*.
22. — A. COTTA. — *Théorie générale du capital, de la croissance et des fluctuations*.
23. — J. H. HENDERSON et R. E. QUANDT. — *Microéconomie* (*Formulation mathématique élémentaire*).
24. — G. PALMADE. — *L'économie et les sciences humaines*. Tome I.
25. — G. PALMADE. — *L'économie et les sciences humaines*. Tome II.
26. — L. STOLERU. — *L'équilibre et la croissance économiques*. *Principe de macroéconomie*.
27. — J. C. BOOT. — *Programmation quadratique*.

Volumes à paraître :

- D. R. BERGMANN. — *Manuel de méthodologie économique appliquée à l'agriculture*.
 J. LESOURNE. — *Théorie de l'optimum économique*.
 B. ROY. — *Algèbre moderne et théorie des graphes*.
 J. ULLMO. — *Le profit*.
 W. J. GRANGER. — *Analyse spectrale des séries temporelles en économie*.
 B. DE FINETTI. — *Mathématiques financières*.
 B. DE FINETTI. — *L'incertain en économie*.

PROGRAMMATION QUADRATIQUE

*ALGORITHMES, ANOMALIES
APPLICATIONS*

PAR

J. C. G. BOOT

Econometric Institute
Netherlands School of Economics

TRADUIT PAR

J. L. BODIN

H. PICARD

Anciens élèves de l'École polytechnique
Administrateurs de l'I. N. S. E. E.

DUNOD

PARIS

1968

Traduction autorisée de l'ouvrage
publié en langue anglaise sous le titre :
QUADRATIC PROGRAMMING
par NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
Amsterdam

AVANT-PROPOS

La programmation quadratique a pour but la recherche du maximum d'une fonction quadratique sous des contraintes d'inégalités linéaires. Dans cet ouvrage sont discutés un certain nombre d'*algorithmes*. La méthode combinatoire de Theil et Van de Panne, et la méthode de la capacité de Houthakker, sont, par exemple, assez longuement discutées, et, pour celle de Theil et Van de Panne, on étudie la dégénérescence. On a éliminé la trop grande dépense de calcul dans la méthode de la capacité de Houthakker, tandis qu'un certain nombre de malentendus possibles, à propos de son application, sont clarifiés. Les aspects méthodologiques des méthodes de capacité sont très généralement exposés. Un certain nombre d'*algorithmes* qui permettent de résoudre un problème de programmation quadratique en utilisant le tableau du simplexe sont également exposés. Ces derniers reposent en grande partie sur les travaux de Dantzig, Wolfe et Van de Panne. Pour des problèmes pratiques, qu'ils soient de faible ou de grande dimension, de telles méthodes sont d'un grand intérêt du fait de leur simplicité.

Dans toutes les discussions, on met tout particulièrement l'accent sur des *anomalies*, telles que les contraintes triviales — on appelle ainsi une contrainte qui n'intervient pas pour limiter la région réalisable — et la dépendance — qui se produit chaque fois qu'à un certain stade des calculs, le nombre des variables non nulles est inférieur au nombre d'équations. Bien qu'en programmation linéaire, on puisse identifier la dépendance et la dégénérescence, en programmation quadratique, ces deux concepts doivent être distingués. S'il y a dépendance, une variable de Lagrange associée à une inégalité («plus petite ou égale à») peut très bien être nulle au point solution. On discutera assez longuement, en divers endroits de cet ouvrage, la dégénérescence, qui est aussi une anomalie.

La théorie est *appliquée* au problème de l'utilisation des surplus de lait aux Pays-Bas. On l'applique aussi — comme l'a fait Houthakker — pour montrer que les courbes d'Engel sont des lignes brisées, chaque fois que l'on s'aperçoit explicitement qu'on ne peut pas acheter de quantités négatives de biens et que la fonction d'utilité est quadratique. On trouve mentionnée à plusieurs reprises une autre application — le problème du choix d'un portefeuille posé par Markowitz —, mais on ne l'a pas traitée de façon détaillée.

On peut lire cet ouvrage si l'on a des connaissances en algèbre matricielle du niveau de propédeutique. Les théorèmes moins connus, qui y sont utilisés, sont démontrés dans un chapitre de préliminaires mathématiques. Je dois beaucoup aux éditeurs de *Management Science*, *The Journal of Farm Economics*,

Econometrica et *Operations Research* qui m'ont autorisé à utiliser des résultats parus dans leur revue.

Je désire exprimer ma reconnaissance aux Professeurs Benders et Houthakker, à M. Beale et à M. Van de Panne pour leurs conseils et leurs remarques. Mais, j'adresse avant tout mes remerciements les plus sincères au Professeur Theil qui a bien voulu me faire part de ses suggestions et me prodiguer ses encouragements.

M^{lle} M.H. J. Th. Close, M^{me} P. Fransen et M^{lle} C.A. Berger, qui ont travaillé à la dactylographie du manuscrit, savent bien combien je les apprécie, elles et leur travail.

J. C. G. BOOT

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	VIII
------------------------	------

CHAPITRE PREMIER. — Introduction

1.1. <i>Quelques exemples de problèmes de programmation quadratique</i>	1
1. Un problème d'investissement. 2. Problèmes d'analyse de la régression; théorie du consommateur et recherche du profit maximum.	
1.2. <i>Le problème général de la programmation quadratique convexe</i>	4
1. Les contraintes et la fonction - objectif. 2. Fonctions-objectif quadratiques convexes. 3. Contraintes, équations, inégalités et conditions de non-négativité.	
1.3. <i>Notations, terminologie et définitions</i>	6
1. Utilisation des lettres latines et des lettres grecques; matrices définies positives et semi-définies positives. 2. Contraintes satisfaites, largement satisfaites, liantes et non satisfaites; région réalisable. 3. Notations complémentaires à propos des équations, des inégalités et des conditions de non-négativité.	
1.4. <i>Aperçu du contenu de l'ouvrage.</i>	9
1. Quelques détails techniques. 2. Grandes lignes de l'ouvrage. 3. Endroits de l'ouvrage où l'on discute la dégénérescence. 4. Remarques.	

CHAPITRE 2. — Préliminaires mathématiques

2.1. <i>Algèbre matricielle</i>	13
1. Résultats supposés connus; matrices définies positives et semi-définies positives. 2. Dépendance linéaire d'un système de vecteurs et rang des matrices. 3. Matrice inverse.	
2.2. <i>Quelques résultats particuliers d'algèbre matricielle</i>	16
1. Décomposition en blocs. 2. Inverse d'une matrice décomposée en blocs. 3. Trace d'une matrice. 4. Différentiation des scalaires par rapport à des matrices ou à des vecteurs. 5. Dérivée d'une matrice par rapport à un scalaire.	
2.3. <i>La condition de convexité</i>	22
1. Voisinage immédiat d'un point donné. 2. Si une matrice est semi-définie positive, le maximum local de la forme quadratique associée est un maximum absolu.	
2.4. <i>Recherche du maximum d'une fonction quadratique</i>	24
1. Condition nécessaire et suffisante lorsque la matrice associée est définie positive. 2. Complications lorsqu'elle n'est que semi-définie positive.	

2.5. Recherche du maximum sous des contraintes d'égalité linéaires	25
1. Condition nécessaire et suffisante. 2. Les multiplicateurs de Lagrange. 3. Leur signe; dégénérescence. 4. Référence à d'un exemple	
2.6. Théorème de Farkas	29
1. Solution d'un système d'équations linéaires. 2. Combinaisons linéaires de vecteurs positives ou nulles. 3. Existence de solutions positives ou nulles à des systèmes d'équations linéaires. 4. Existence de solutions positives ou nulles à des systèmes d'inégalités linéaires. 5. Existence de solutions à des systèmes d'inégalités linéaires.	
2.7. Les conditions de Kuhn et Tucker	34
1. Reformulation du problème de la programmation quadratique. 2. Énoncé du théorème de Kuhn et Tucker. 3. Démonstration de la condition suffisante de ce théorème. 4. Démonstration sommaire de sa condition nécessaire. 5. Interprétation économique; variables de Lagrange; dégénérescence.	

ANNEXE AU CHAPITRE 2

2.A. L'inverse généralisée d'une matrice; un exemple de maximum lié	39
1. L'inverse généralisée d'une matrice. 2. Exemple numérique. 3. Formules conduisant à l'inverse généralisée; ses propriétés. 4. Calculs. 5. Application.	
2.B. Démonstration du théorème de l'hyperplan séparateur	48
1. Énoncé du théorème. 2. Démonstration par récurrence. 3. Remarques.	
2.C. Démonstration du théorème de Kuhn et Tucker en programmation quadratique	51
1. Énoncé du théorème. 2. Séparation des contraintes en deux groupes, selon qu'elles sont liantes ou largement satisfaites. 3. Démonstration utilisant le théorème de l'hyperplan séparateur.	

CHAPITRE 3. — Contraintes triviales

3.1. Définition des contraintes triviales.	54
1. Exemple. 2. Définition. 3. Illustration	
3.2. Une simplification	56
1. Énoncé de la condition nécessaire et suffisante de trivialité. 2. Démonstration du caractère nécessaire et suffisant de cette démonstration. 3. Résultat simple lorsqu'il y a un point réalisable.	
3.3. Le test de trivialité	58
1. Calculs pour permettre de réaliser ce test. 2. Validité générale de la méthode. 3. Exemple particulier. 4. Un test décisif: l'existence de solutions à un système d'inégalités linéaires.	
3.4. Applications numériques	61
1. L'exemple donné par Houthakker. 2. Exemples destinés à illustrer quelques cas limites. 3. Exemples destinés à illustrer quelques cas limites (suite). 4. Exemple dans lequel sont explicitement mentionnées les conditions de non- négativité. 5. Conclusion	

CHAPITRE 4. — La programmation linéaire

4.1. Variables de base et autres variables	65
1. Reformulation du problème de la programmation linéaire. 2. Nombre maximum de variables positives de la solution. 3. Complications. 4. Solutions réalisables de base.	
4.2. La méthode du simplexe	69
1. Le tableau du simplexe et le pivot. 2. Comment déterminer la variable qui n'est pas dans la base et qui doit y rentrer. 3. La ligne inférieure du tableau du simplexe. 4. Exemple numérique.	
4.3. Un exemple destiné à illustrer quelques points délicats	74
1. Un exemple numérique et le premier tableau du simplexe. 2. Deuxième et troisième tableaux du simplexe. Un exemple de dégénérescence. 3. Quatrième et cinquième tableaux du simplexe. Solution.	
4.4. Dualité et dégénérescence en programmation linéaire.	78
1. Théorème de la dualité. 2. Interprétation du problème primal et du problème dual. 3. Les variables duales et les variables de Lagrange. 4. Dégénérescence.	
4.5. La solution duale et le tableau du simplexe. Résumé du chapitre.	81
1. Les éléments de la dernière ligne du tableau final du simplexe sont la solution du problème dual. 2. Démonstration. 3. Démonstration (suite). 4. Dégénérescence dans un tableau du simplexe en programmation linéaire. 5. Résumé du chapitre. 6. Algorithme du cosinus.	

ANNEXE AU CHAPITRE 4

4.A. Démonstration du théorème de dualité	87
1. Position du problème à l'aide du concept de trivialité. 2. Démonstration. 3. Démonstration (suite). 4. Démonstration (suite et fin).	
4.B. L'algorithme du cosinus en programmation linéaire	89
1. L'essence de l'algorithme du cosinus. 2. Interprétation géométrique de l'algorithme; difficultés lorsqu'il y a des contraintes triviales. 3. Exemple numérique dans le cas de deux dimensions. 4. Contre-exemple numérique dans le cas de trois dimensions.	

CHAPITRE 5. — La méthode de Theil et Van de Panne

5.1. Introduction	94
1. Le sous-ensemble S de contraintes liantes. 2. Explication de la méthode de Theil et Van de Panne à l'aide de figures. 3. Condition pour que le sous-ensemble S de contraintes liantes soit l'ensemble des contraintes liantes pour la solution. 4. Reformulation de la condition.	
5.2. Le théorème de base	97
1. Calculs préliminaires. 2. Le théorème de base. 3. Démonstration de la première partie du théorème de base. 4. Démonstration de la seconde partie du théorème de base.	

5.3. <i>Le théorème de dégénérescence et le théorème du sous-ensemble</i>	101
1. Apparition de la dégénérescence. 2. Le théorème de dégénérescence. 3. Le théorème du sous-ensemble.	
5.4. <i>La méthode de Theil et Van de Panne en l'absence de dégénérescence</i> . . .	102
1. L'ensemble solution $\hat{S}$. 2. Condition suffisante pour qu'un ensemble soit l'ensemble solution $\hat{S}$. 3. Condition nécessaire pour qu'un ensemble soit l'ensemble solution $\hat{S}$. 4. Théorème justifiant la méthode de Theil et Van de Panne. 5. Remarques complémentaires à propos de la méthode de Theil et van de Panne.	
5.5. <i>Exemple numérique</i>	106
1. Le tableau combinatoire relatif au problème de Houthakker. 2. La méthode de Theil et Van de Panne lorsqu'il y a des contraintes d'égalité.	
5.6. <i>Étude générale des solutions dégénérées</i>	109
1. La dégénérescence et la méthode des perturbations. 2. Exemple de cas de dégénérescence. 3. Conséquences de petites perturbations.	
5.7. <i>Dégénérescence et dépendance</i>	111
1. Résumé de la méthode de Theil et Van de Panne. 2. Unicité du plus grand ensemble solution. 3. Le plus petit ensemble solution n'est pas unique. 4. Dépendance et autres remarques. 5. Reformulation des conditions nécessaires et suffisantes pour les étendre aux cas de dégénérescence et de dépendance.	

ANNEXE AU CHAPITRE 5

5.A. <i>Unicité du plus petit sous-ensemble générateur de la solution</i>	117
1. Les ensembles F , G et F^* . 2. Le problème. 3. Dépendance. 4. Ensemble des plus petits ensembles solutions. 5. Démonstration du fait qu'au moins un plus petit ensemble solution est associé à des variables de Lagrange toutes positives.	
5.B. <i>Dépendance en l'absence de trivialité</i>	122
5.C. <i>Dépendance en programmation linéaire</i>	123
1. La nullité d'une variable de base implique la dépendance. 2. Un exemple.	

CHAPITRE 6. — Les méthodes de capacité

6.1. <i>Principe des méthodes de capacité</i>	125
1. La contrainte paramétrique. 2. Notations. 3. Les points critiques. 4. La méthode de la capacité.	
6.2. <i>Neuf remarques</i>	128
6.3. <i>La méthode de la capacité à l'aide des variables de Lagrange. Calculs</i> . .	131
1. Notations. 2. Calculs à effectuer lors de la recherche du maximum sous contraintes. 3. Résolution pour les variables de Lagrange. 4. Les calculs dans la méthode de la capacité. 5. Remarque permettant d'éviter certains calculs inutiles.	

6.4. <i>La méthode de la capacité à l'aide des variables de Lagrange. Une illustration de la dépendance.</i>	135
1. Le problème de Houthakker. 2. Démarrage et première étape. 3. Étapes suivantes. 4. Dépendance.	
6.5. <i>La méthode de la capacité à l'aide des variables de Lagrange. Illustration du cas des points critiques à dégénérescence multiple</i>	140
1. Adaptation du problème de Houthakker. 2. Dégénérescence multiple.	
6.6. <i>La méthode de la capacité de Houthakker</i>	142
1. La méthode de calcul de Houthakker. 2. Considérations supplémentaires sur la méthode de calcul de Houthakker et la méthode qui en résulte. 3. Dégénérescence multiple. 4. Difficultés en cas de dégénérescence multiple. 5. Présence de coefficients négatifs dans les contraintes. 6. Comparaison de la méthode de la capacité à l'aide des variables de Lagrange et de la méthode de la capacité de Houthakker	
6.7. <i>Utilisation de la méthode de Houthakker.</i>	146
1. Le problème du rationnement. 2. Les courbes d'Engel.	

CHAPITRE 7. — L'usage optimal du lait aux Pays-Bas

7.1. <i>Le Problème.</i>	151
1. Présentation du problème. 2. L'organisation du marché des produits laitiers aux Pays-Bas. 3. Plan du chapitre.	
7.2. <i>Le Produit «Lait»</i>	153
1. Composition du lait. 2. Ce qu'on peut tirer du lait. 3. Expression des contraintes.	
7.3. <i>Les fonctions de demande</i>	155
1. Expression algébrique des fonctions de demande. 2. Valeurs numériques des élasticités. 3. Valeurs numériques des fonctions de demande. 4. La fonction-objectif.	
7.4. <i>La contrainte politique</i>	158
7.5. <i>Résultats numériques</i>	159
1. Valeur numérique des matrices. 2. Résultats pour $\kappa = 0$. 3. Interprétation des résultats. Commentaires. 4. Résultats pour d'autres valeurs de κ .	
7.6. <i>Résumé et conclusion</i>	162

CHAPITRE 8. — Calcul d'erreurs

8.1. <i>Variations du vecteur solution dues à des variations infinitésimales des données</i>	164
1. Calcul d'erreur. Solution robuste. 2. Les formules de base. 3. Résultats. 4. Autres résultats. 5. Effets d'une variation de prix : effet de revenu, effet de substitution. 6. Variations de la valeur du maximum.	
8.2. <i>Exemple</i>	169
1. Valeurs numériques. 2. Effets de variations de 1% des valeurs des élasticités. 3. Commentaires.	
8.3. <i>La méthode de simulation</i>	175
1. La méthode. 2. Quelles sont les formules qui, calculées pour des variations infinitésimales, restent vraies pour des variations finies. 3. Résultats.	
8.4. <i>Analyse de la sensibilité et dégénérescence</i>	179
1. Variations finies. 2. Variations finies d'un élément de a . 3. Variations finies du vecteur a . 4. La méthode de Markowitz. 5. Exemple numérique, le problème de Houthakker. 6. La méthode de Wolfe. 7. Variations finies d'un élément du vecteur d , ou de tout le vecteur d . 8. Variations finies d'un élément de la matrice B ou de toute la matrice B . 9. Variations finies d'un élément de la matrice C ou de toute la matrice C . 10. Résumé et commentaires.	

CHAPITRE 9. — La forme quadratique semi-définie positive

9.1. <i>Introduction</i>	186
1. Les problèmes réels et la matrice semi-définie positive. 2. Comment transformer une matrice semi-définie positive en matrice définie positive. 3. Présentation des différents algorithmes qu'on verra plus loin.	
9.2. <i>L'algorithme de Dantzig. Principe</i>	187
1. Nouvelle présentation du problème. 2. Les conditions de Kuhn et Tucker. 3. Les formes standard et non-standard. 4. Premier tableau du simplexe. 5. Variable qui doit rentrer dans la base (cas standard). 6. Variable qui doit rentrer dans la base (cas non-standard).	
9.3. <i>L'algorithme de Dantzig. Calcul</i>	193
1. Règle d'échange des variables dans les cas standard et non-standard. 2. Cette méthode conduit au résultat en un nombre fini d'étapes.	
9.4. <i>Exemple numérique</i>	194
1. Valeurs numériques et premier tableau du simplexe. 2. Deuxième et troisième tableaux. 3. Quatrième, cinquième et sixième tableaux. Solution.	
9.5. <i>Barankin-Dorfman et Frank-Wolfe</i>	196
1. Principe de la méthode de Barankin et Dorfman. 2. Exposé de la méthode. 3. Pourquoi on risque de ne pas arriver à la solution. 4. La méthode améliorée par Frank et Wolfe.	
9.6. <i>Algorithme de Wolfe</i>	198
1. Principe de l'algorithme de Wolfe. 2. Première étape. 3. Deuxième étape. 4. Troisième et dernière étapes.	

ANNEXE AU CHAPITRE 9

9.A. <i>La méthode des perturbations.</i>	201
1. Expression du problème. 2. La valeur du maximum est la même à la limite.	
3. Les points x_ε forment un ensemble borné. 4. Démonstration finale.	
9.B. <i>Grandes lignes de la démonstration des propositions du paragraphe 9.2</i> . .	203
1. Expression du problème. Le lemme 1. 2. Démonstration du lemme 1.	
3. Le lemme 2 et sa démonstration. 4. Commentaires.	
BIBLIOGRAPHIE	209
INDEX	213

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1.1. QUELQUES EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE

1.1.1. La programmation quadratique consiste à rechercher le maximum d'une fonction quadratique soumise à des contraintes d'inégalité linéaires. On rencontre des problèmes de ce type dans des circonstances diverses. Par exemple, supposons qu'un «agent économique» ait 10 000 F à placer sur un marché financier. Comme tout investisseur, cet agent va se demander quel portefeuille — c'est-à-dire, quelle combinaison de titres — il doit acheter. Cela dépend, *tout d'abord*, de ce qu'il pense des rendements futurs des divers titres. On suppose qu'il se représente les niveaux futurs des titres *en termes probabilistes*. Plus précisément, on suppose qu'il considère que le rendement d'un investissement dans le i -ième titre *est distribué suivant une loi normale* d'espérance μ_i et de variance σ_{ii} .

La variance est une mesure du risque que le rendement réalisé diffère du rendement espéré. Un titre dont le rendement a une variance élevée est risqué. Si on investit dans deux titres i et j , la covariance σ_{ij} de leurs rendements est une mesure de la corrélation entre les rendements des titres i et j . Si la covariance est positive, cela implique que les rendements des deux titres varient habituellement dans le même sens, ce qui accroît le risque de grandes fluctuations des rendements dans le temps, car si un gain sur le titre i est habituellement accompagné d'un gain sur le titre j , il en est de même pour les pertes. Pour diminuer les risques, on aimerait pouvoir compenser les pertes sur i par des gains sur j .

On suppose alors que l'agent considéré a réussi à définir les valeurs des quantités μ_i , σ_{ii} et σ_{ij} . On peut les déterminer, ou en trouver des valeurs approchées, en analysant des séries chronologiques, mais on peut aussi les obtenir (de façon «bayésienne») à partir de convictions *a priori* et des connaissances personnelles que semble avoir tout investisseur. Même si deux personnes retiennent les mêmes valeurs pour μ_i , σ_{ii} , et σ_{ij} pour tous les titres considérés, elles ne retiendront pas nécessairement le même portefeuille. Car, *en second lieu*, ce qu'elles vont acheter va dépendre de leur attitude à l'égard du risque. Il y en a qui recherchent un flux de revenus stable, et d'autres qui ne répugnent pas le moins du monde à prendre des risques.

Quel que soit le caractère de la personne qui investit, on suppose toutefois que :

(i) parmi tous les choix qui conduisent à la même espérance de rendement, elle choisira le portefeuille qui a la plus petite variance, ce qui revient à dire qu'elle n'a pas de préférence pour le risque. De plus :

(ii) parmi tous les choix qui conduisent à la même variance du rendement, elle choisira le portefeuille qui a la plus grande espérance de rendement.

Ces deux hypothèses équivalent à la proposition suivante : « on ne prend en compte que les portefeuilles *efficaces* ». Il en résulte alors qu'un portefeuille *n'est pas efficace* s'il en existe un autre qui a un rendement plus élevé et la même variance, ou le même rendement et une variance plus faible.

On se demande alors comment déterminer la valeur π_i , *proportion* du total investi (10 000 F) investie dans le i -ième titre. Étant donné que la personne qui investit a un certain coefficient d'aversion pour le risque $\rho \geq 0$, nous obtiendrons un portefeuille efficace en recherchant le maximum de

$$\sum \pi_i \mu_i - \rho \sum \sum \sigma_{ij} \pi_i \pi_j \quad (1.1)$$

sous les contraintes :

$$\sum \pi_i = 1 ; \quad \pi_i \geq 0 \quad \text{quel que soit } i. \quad (1.2)$$

Ces dernières conditions signifient simplement que les proportions doivent être positives ou nulles, et que leur somme doit valoir 1 ; aucune somme négative ne peut être investie dans un titre quelconque. Le terme $\sum \pi_i \mu_i$ de (1.1) mesure l'espérance de rendement du portefeuille, l'expression $\sum \sum \sigma_{ij} \pi_i \pi_j$ la variance totale. Si $\rho = 0$, ce qui signifie que la personne qui investit n'a aucune aversion pour le risque, le problème consiste à rechercher le maximum de l'espérance de rendement. Si $\rho \rightarrow \infty$, ce qui signifie qu'elle a une très grande aversion pour le risque, le problème revient à rechercher le minimum de la variance du rendement. C'est le cas si elle recherche un *revenu non aléatoire d'un montant fixé à l'avance*, ce qui peut fort bien conduire à une espérance de rendement très faible.

Il est facile de voir que la recherche du maximum de (1.1) pour un ρ donné, conduit bien à un portefeuille efficace. Quand, ρ étant donné, on a déterminé les π_i de telle sorte que (1.1) soit maximum, il n'existe *aucun* portefeuille ayant la même variance $\sum \sum \sigma_{ij} \pi_i \pi_j$ et une espérance de rendement $\sum \pi_i \mu_i$ plus élevée, et aucun portefeuille ayant la même espérance de rendement et une variance plus faible — sinon, nous ne serions pas au maximum. Dans toutes les situations considérées, (1.2) doit être vérifiée. (Pour plus de détails, voir Markowitz⁽¹⁾, à qui nous devons cet exemple.)

Observons que (1.1) est une fonction quadratique des variables de décision π_i , et que nous devons rendre cette fonction maximum sous des contraintes de

(1) Voir H. M. MARKOWITZ, *Portfolio selection* (New York-London, 1959).

non-négativité, et sous une contrainte linéaire portant sur les variables π_i : $\sum \pi_i = 1$. Voilà le type des problèmes de programmation quadratique. Bien que la structure de ces problèmes soit définie de façon plutôt stricte, nous en rencontrerons dans une série assez vaste de problèmes différents. Nous allons donner trois autres exemples à titre d'illustration.

1.1.2. Soit la régression

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t, \quad (1.3)$$

où y_t est la t -ième observation d'une variable endogène, x_t la t -ième observation d'une variable exogène (non aléatoire), u_t une erreur aléatoire et α et β les paramètres de la régression. La théorie des moindres carrés conduit alors à des estimateurs de α et β , a et b , qui rendent minimum :

$$\sum_t (y_t - a - bx_t)^2. \quad (1.4)$$

C'est une fonction quadratique de a et de b . En rendant minimum (1.4), on peut être conduit à des estimations des paramètres qui semblent improbables, en raison de convictions *a priori*, fondées sur une théorie économique, ou sur d'autres raisons analogues. Si ces convictions sont suffisamment fortes, de telle sorte qu'on ne croira jamais à des estimations situées à l'extérieur de certaines limites, il est raisonnable de s'imposer ces limites *a priori*, ce qui peut conduire à des restrictions sur l'estimateur b de β du type :

$$b_0 \leq b \leq b_1. \quad (1.5)$$

Si nous nous imposons de telles restrictions, nous avons à rendre minimum une fonction quadratique sous des contraintes d'inégalité linéaires ; nous avons donc à nouveau un problème de programmation quadratique ⁽¹⁾.

La théorie (classique) de la consommation fournit aussi un exemple important. Supposons que la fonction d'utilité d'un individu soit une fonction quadratique Q des quantités x_i de biens consommés. Étant donnés le revenu M et les prix p_i , le problème que se pose le consommateur est de rendre maximum :

$$Q(x_1, \dots, x_n) \quad (1.6)$$

sous les contraintes :

$$\sum p_i x_i = M, \quad (1.7)$$

et

$$x_i \geq 0 \quad \text{quel que soit } i. \quad (1.8)$$

(1) Voir A. ZELLNER, « Linear regression with inequality constraints on the coefficients : An application of quadratic programming and linear decision rules ». Report 6109 of the Econometric Institute of the Netherlands School of Economics ; et également, du même auteur, « Decision rules for economic forecasting », *Econometrica*, vol. 31 (1963), pp. 111 à 131.

Voilà encore un problème de programmation quadratique. Si on ne tient pas compte des conditions d'inégalité, les courbes d'Engel auxquelles on est conduit sont des droites. Si on tient compte correctement de ces conditions (1.8), les courbes d'Engel sont des lignes brisées, comme l'a montré Houthakker ⁽¹⁾. Voir aussi le chapitre 6, paragraphe 7, ci-dessous.

Enfin, un entrepreneur qui désire rendre maximum son profit peut avoir à résoudre un problème de programmation quadratique. Supposons, par exemple, qu'il puisse produire n biens en quantité x_i ($i = 1, \dots, n$). Chacun de ces biens peut être vendu avec un profit p_i , qui décroît linéairement au fur et à mesure que x_i croît :

$$p_i = a_i - b_i x_i \quad (a_i > 0, b_i > 0 \text{ quel que soit } i). \quad (1.9)$$

Son profit total est donné par la fonction quadratique

$$\sum p_i x_i = \sum a_i x_i - \sum b_i x_i^2. \quad (1.10)$$

Si les fonctions de production ont des coefficients techniques c_{hi} fixes, et s'il y a m ressources rares (l'entrepreneur n'a à sa disposition que des quantités limitées de travail, de capital, etc.), le problème consiste à rendre maximum la fonction quadratique (1.10) sous les contraintes

$$\sum_{i=1}^n c_{hi} x_i \leq d_h, \quad (h = 1, \dots, m), \quad (1.11)$$

et, bien sûr :

$$x_i \geq 0, \quad (1.12)$$

car on ne peut évidemment produire des quantités négatives. Voilà une fois de plus un problème typique de programmation quadratique.

1.2. LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE CONVEXE

1.2.1. Les éléments essentiels d'un problème de programmation quadratique, c'est-à-dire ceux qui font qu'un problème est bien un problème de programmation quadratique, ne sont qu'au nombre de deux :

- (i) il doit y avoir une fonction quadratique à rendre maximum ou minimum,
- (ii) sous des contraintes d'inégalité linéaires. Il peut y avoir, en plus des contraintes d'inégalité, des contraintes d'égalité, telles que (1.2) ou (1.7). La plupart du temps, au moins une partie des contraintes d'inégalité sont des conditions de non-négativité sur les variables; mais, ce n'est pas nécessairement le cas, comme on l'a vu pour la régression.

⁽¹⁾ Voir H. S. HOUTHAKKER : «La forme des courbes d'Engel», *Cahiers du Séminaire d'Économétrie*, n° 2 (1953), pp. 59 à 66.

Sous forme mathématique, le problème de la programmation quadratique se présente généralement de la manière suivante : déterminer les n valeurs ξ_i qui rendent maximum

$$\sum \alpha_i \xi_i - \frac{1}{2} \sum \sum \beta_{ij} \xi_i \xi_j \quad (2.1)$$

sous les contraintes linéaires :

$$\sum \gamma_{hi} \xi_i \leq \delta_h \quad (h = 1, \dots, m). \quad (2.2)$$

La fonction (2.1) s'appelle *fonction-objectif*. Le facteur $\frac{1}{2}$ devant le terme quadratique de la fonction-objectif se révélera commode pour les calculs. Dans le cas où il y a aussi des contraintes d'égalité, il faut les écrire séparément. (2.2) peut inclure — ou non — les conditions de non-négativité. S'il y en a, il vaut souvent mieux les écrire explicitement. Dans cet ouvrage, les problèmes que nous rencontrerons auront cette structure de base très simple.

1.2.2. En fait, même la forme (2.1) est, d'une certaine manière, trop générale. En effet, nous ne rencontrerons que des problèmes dans lesquels les coefficients β_{ij} obéiront à

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0, \quad (2.3)$$

quelles que soient les valeurs prises par les n variables ξ_i . En fait, nous supposerons la plupart du temps que (2.3) est une inégalité stricte pourvu que au moins un ξ_i ne soit pas nul. On connaît ce type de problèmes sous le nom de problèmes de *programmation quadratique convexe*, car la condition (2.3) est l'expression mathématique du fait que la fonction quadratique (2.1) est convexe. Si (2.3) n'est pas satisfaite, aucune des méthodes de résolution que nous discuterons ne peut conduire à coup sûr aux valeurs ξ_i qui résolvent le problème posé.

Dans tous les exemples du paragraphe précédent, la fonction quadratique était convexe. Dans (1.1), les coefficients σ_{ij} sont les éléments d'une matrice des variances et covariances pour laquelle (2.3) est toujours nécessairement satisfaite. Dans (1.4), on peut écrire la partie quadratique en a et b sous la forme

$$ka^2 + b^2 \sum x_i^2 + 2ab \sum x_i, \quad (2.4)$$

si l'on désigne par k le nombre d'observations faites sur x et y . Si nous convenons d'écrire $\bar{x} = (1/k) \sum x_i$, nous pouvons réécrire (2.4) sous la forme équivalente

$$k(a + b\bar{x})^2 + b^2 \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.5)$$

qui n'est évidemment jamais négative, puisque les carrés, les sommes de carrés et k sont tous positifs ou nuls. Ainsi, là encore, (2.3) est satisfaite.

Dans le cas de la fonction d'utilité du consommateur (1.6), l'hypothèse que (2.3) est satisfaite, revient à supposer que les courbes d'indifférence sont des

ellipses concentriques, ou — si (2.3) est une égalité — des paraboles. De telles courbes, pourvu que le maximum libre se trouve dans le premier quadrant (ou dans sa généralisation à n dimensions), obéissent à l'hypothèse économique habituelle de décroissance des taux marginaux de substitution entre les divers bien x_i . Enfin, la fonction quadratique (1.10) est évidemment convexe puisque, par hypothèse, les coefficients b_i sont tous positifs.

1.2.3. On doit faire très attention aux contraintes (2.2). Elles sont toutes linéaires; si nous considérons des contraintes d'inégalité non linéaires, nous entrons dans le domaine de la programmation (convexe) la plus générale, et ce n'est plus de la programmation quadratique. De plus, quelques-unes au moins des contraintes, sinon toutes, sont sous forme d'inégalité, et non d'égalité. Sinon, il s'agirait de rendre maximum une fonction sous des contraintes d'égalité — c'est ce qu'on appelle un *problème de maximum lié*, — ce qui est beaucoup plus facile. En fait, la plupart des méthodes que nous discuterons consistent à ramener les problèmes de programmation à des problèmes de maximum lié. Comme nous l'avons déjà remarqué, un certain nombre de contraintes d'inégalité se présentent d'habitude sous la forme $\xi_i \geq 0$ (ou $\xi_i \leq 0$). Il peut y avoir n contraintes de cette sorte, une par variable. Dans de tels cas, il peut se révéler utile de considérer séparément chacune de ces inégalités très simples, comme en programmation linéaire. Il sera utile à l'occasion de supposer $\delta_h \geq 0$ quel que soit h ; dans ce cas, les valeurs $\xi_i = 0$ satisfont les contraintes d'inégalité quel que soit i , et peuvent être un point de départ pour un algorithme. (Un algorithme est une méthode qui conduit par itérations à la solution.)

1.3. NOTATIONS, TERMINOLOGIE ET DÉFINITIONS

1.3.1. Il se révélera très commode d'utiliser des notations vectorielles et matricielles, ce qui implique que nous utiliserons fréquemment l'algèbre matricielle. On supposera connues les notions de base de l'algèbre matricielle, y compris la multiplication de matrices, l'inversion d'une matrice et les notions de rang et d'(in)dépendance linéaire. Nous donnerons dans le prochain chapitre quelques résultats moins connus que nous utiliserons dans le reste de l'ouvrage.

Nous utiliserons strictement les notations suivantes. *Tout d'abord*, les nombres réels seront désignés par des lettres grecques minuscules. Les vecteurs seront désignés par des lettres latines minuscules. On considérera que ce sont des vecteurs-colonnes, sauf si la notation «prime» indique qu'ils ont été transposés en des vecteurs-lignes. Comme les composantes d'un vecteur sont des nombres réels, elles seront désignées par des lettres grecques minuscules : un vecteur x' à n composantes s'écrira donc $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Les matrices seront désignées par des lettres latines majuscules; les éléments d'une matrice A seront notés α_{hi} , h étant le numéro de la ligne et i celui de la colonne. On notera A' la matrice obtenue en transposant les lignes et les colonnes de A . On peut donc

écrire la fonction-objectif sous forme matricielle :

$$\psi(x) = a'x - \frac{1}{2}x'Bx \quad (3.1)$$

où a et x sont des vecteurs à n composantes, et B une matrice d'ordre $n \times n$. Une matrice B dont les éléments satisfont (2.3) pour tout vecteur x , est appelée matrice *semi-définie positive*. Si (2.3) est strictement réalisée pour tout vecteur x , sauf le vecteur 0, B est appelée *définie positive*.

De plus, nous utiliserons des lettres latines minuscules comme indices ou exposants, ce que notre manière d'écrire les composantes des vecteurs et les éléments des matrices a déjà indiqué. Notons incidemment que nous parlerons de matrices d'ordre $m \times n$ et de vecteurs à n composantes, et que, dans ce cas particulier, nous utilisons des lettres latines minuscules pour désigner des scalaires et non plus des vecteurs. Nous utiliserons aussi quelques matrices et quelques vecteurs particuliers; I : matrice unité; i_h : h -ième vecteur unité, et i (sans aucun indice) : vecteur dont toutes les composantes valent 1. L'ordre de ces vecteurs ou de cette matrice apparaîtra sans ambiguïté d'après le contexte. Le symbole 0 peut désigner le scalaire 0, un vecteur 0 ou une matrice 0 d'ordre convenable.

Nous désignerons aussi par des lettres latines majuscules (en plus des matrices), les ensembles. Nous désignerons par $\emptyset$ l'ensemble vide. La notation S/f signifie : «L'ensemble S contient f éléments.» Nous utiliserons les symboles usuels : $\{ \}$, $\cup$, $\cap$, $-$, $\in$ et $\subset$ pour indiquer respectivement : la formation d'un ensemble, les opérations d'union, d'intersection et de différence d'ensembles, l'appartenance à un ensemble et la relation d'inclusion.

Nous respecterons la convention d'emploi de la lettre «d ronde» (∂), pour indiquer que l'on prend la dérivée d'un scalaire par rapport à une matrice, ou d'une matrice par rapport à un vecteur.

1.3.2. Soient $x' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $y' = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Par définition :

$$\begin{aligned} x &= y \text{ si } \xi_i = \eta_i \text{ quel que soit } i; \\ x &\cong y \text{ si } \xi_i \geq \eta_i \text{ quel que soit } i; \\ x &\supseteq y \text{ si } \xi_i \geq \eta_i \text{ quel que soit } i, \text{ et } x \neq y; \\ x &> y \text{ si } \xi_i > \eta_i \text{ quel que soit } i^{(1)}. \end{aligned}$$

Par exemple, $x \geq 0$ signifie que chaque composante de x est positive ou nulle, et on peut dire que x est un vecteur positif ou nul.

On appellera contrainte linéaire une inégalité du type $c'x \leq \delta$. Comme toutes les contraintes dont nous nous occuperons sont linéaires, nous ne donnerons pas d'habitude cette précision. Une contrainte peut être satisfaite, soit *largement* (quand on a une inégalité stricte), soit *à l'égalité* — on dit alors que *la contrainte est liante* — (quand on a une égalité stricte), ou peut très bien *ne pas être*

⁽¹⁾ Pour les scalaires, $\geq$ correspond à la notation $\geq$, plus habituellement utilisée en France (N. d. T.)

satisfaite (quand $c'x > \delta$). Une contrainte qui se présente sous la forme simple $\xi \geq 0$ s'appellera condition de non-négativité. On désignera souvent par contrainte d'égalité une équation $c'x = \delta$.

De manière concise, on peut noter l'ensemble (2.2) des contraintes d'inégalité linéaires sous la forme

$$C'x \leq d, \quad (3.2)$$

où C' est d'ordre $m \times n$ et où x et d sont respectivement des vecteurs à n et m composantes. On appelle les vecteurs x qui satisfont toutes les contraintes *vecteurs réalisables*; ils définissent des points réalisables. On appelle *région réalisable* l'ensemble $F = \{x | C'x \leq d\}$. On peut facilement vérifier que la région réalisable est convexe, c'est-à-dire que, lorsque $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$, alors

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F, \quad \text{avec } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

La région réalisable peut être vide ou peut être tout l'espace à n dimensions. D'une façon générale, elle peut être un ensemble fermé quelconque, borné ou non.

1.3.3. On peut écrire les contraintes sous diverses formes mais, en bons mathématiciens, nous choisirons la forme la plus utile. Dans le cas général — cas que nous étudierons sauf indications contraires, — il n'y a que des contraintes d'inégalité. La façon la plus concise de les écrire est alors :

$$C'x \leq d, \quad [C' \text{ est d'ordre } m \times n]. \quad (3.3)$$

Dans ce cas, m peut être quelconque. En général, le système (3.3) comprend n conditions de non-négativité. Nous avons alors nécessairement $m \geq n$, soit $m - n = k$. Si nous voulons présenter séparément et explicitement les conditions de non-négativité, supposées implicites dans (3.3), nous écrirons :

$$C^*x \leq d^*, \quad [C^* \text{ est d'ordre } k \times n] \quad (3.4)$$

et

$$x \geq 0 \quad [\text{ou } -Ix \leq 0]. \quad (3.5)$$

Il est souvent utile de réécrire le système (3.4) sous forme d'égalité, ce qui est possible en ajoutant un vecteur positif ou nul y de variables appelées «variables d'écart» au premier membre de (3.4). Cela donne

$$C^*x + Iy = d^* \quad (3.6)$$

et

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (3.7)$$

y est évidemment un vecteur à k composantes, et le système (3.6) contient n variables de plus que d'équations. Si la présence d'un matrice unité dans (3.6) facilite les calculs ultérieurs, aucune autre notation ne se justifie. Cependant, la plupart du temps, le seul trait important de (3.6) est qu'il s'agit d'un système

de k équations à $(n+k)$ inconnues, positives ou nulles. S'il en est ainsi, on peut écrire, pour plus de clarté :

$$E^{**}z = f^*, \quad [E^{**} \text{ est d'ordre } k \times (n+k)], \quad (3.8)$$

$$z \geq 0, \quad (3.9)$$

où E est l'initiale du mot : «Égalité».

En général, nous écrirons un système d'équations sous la forme $E^*x = f$ (sans astérisques) quand il se présentera à propos d'un problème de recherche de maximum sous des contraintes d'égalité. Pour désigner un système d'égalités qui ne se présentera pas à propos d'un problème de programmation ou de recherche de maximum, nous écrirons $Ax = b$.

Si (3.3) comprend n conditions de non-négativité, les formulations (3.3), (3.4)-(3.5), (3.6)-(3.7) et (3.8)-(3.9) sont tout à fait équivalentes. Le choix de celle qu'on utilisera dépendra beaucoup du but particulier que l'on cherchera à atteindre.

Enfin, nous utiliserons assez fréquemment la notation C'_i . C'est une sous-matrice de la matrice C' de (3.3) qui apparaîtra plus loin. Nous montrerons qu'on doit quelquefois imposer à un sous-ensemble des inégalités $C'x \leq d$ d'être exactement des égalités. Nous écrirons ce sous-ensemble S , et le système d'équations résultantes $C'_i x = d_i$.

1.4. APERÇU DU CONTENU DE L'OUVRAGE

1.4.1. L'ouvrage se divise en chapitres et paragraphes numérotés dans cet ordre. Ainsi, le paragraphe 2.3.1 est le premier paragraphe du chapitre 3 du chapitre 2. On numérotera habituellement les formules, à l'aide d'un système à trois chiffres, entourés de parenthèses; le premier d'entre eux repère le chapitre, le second le paragraphe, et le troisième l'ordre de la formule dans le paragraphe. *On omettra, cependant, le numéro du chapitre pour désigner une formule qui se trouve dans le même chapitre.* Ainsi, si (2.3.1) désigne la première formule du troisième paragraphe du chapitre 2, (2.3) désigne la troisième formule du second paragraphe du chapitre dans lequel on se trouve. On repèrera les tableaux et les figures par deux chiffres; le premier désignera le chapitre, et le second leur ordre dans le chapitre.

De temps en temps, on fera en annexe, à la fin du chapitre concerné, des démonstrations difficiles ou des digressions du texte principal. On désignera les annexes par le numéro du chapitre et une lettre : A, B, C, etc. Ainsi l'annexe 2.B est l'annexe B du second chapitre. Les résultats essentiels seront établis dans le texte principal; on pourra donc sauter la lecture des annexes sans préjudice pour la compréhension de l'ouvrage.

1.4.2. Dans le chapitre suivant, nous donnerons avec assez de détails un certain nombre de résultats bien connus qui sont une partie des connaissances de base nécessaires à la compréhension de l'ouvrage. Il s'agira d'abord de

quelques résultats d'algèbre matricielle — inversion de matrices décomposées en blocs, trace des matrices, différentiation par rapport à des vecteurs. On expliquera pourquoi la matrice B de la fonction-objectif doit être définie positive ou semi-définie positive. Puis, nous consacrerons un paragraphe à la recherche du maximum d'une fonction quadratique sous des contraintes d'égalité. Nous établirons et démontrerons les théorèmes de Farkas et de Kuhn et Tucker en annexe. Enfin, nous introduirons le concept de dégénérescence. Une annexe sera consacrée à la discussion du problème de généralisation de la notion de matrice inverse. On montrera que le calcul d'une matrice inverse généralisée peut être considéré comme un problème de recherche du maximum d'une fonction quadratique sous des contraintes d'égalité.

Le chapitre 3 sera consacré aux contraintes linéaires. Nous y parlerons avec assez de détails des contraintes triviales; il s'agit des contraintes dont l'abandon ne modifie pas la solution, *quelle que soit* la fonction-objectif. L'absence de contraintes triviales permet quelquefois de trouver plus rapidement la solution.

On présentera, dans le chapitre 4, la programmation linéaire et la technique du simplexe, qui sera utilisée au chapitre 9 comme base pour des algorithmes de programmation quadratique. En outre, nous reviendrons sur le concept de dégénérescence, traité maintenant dans le cadre de la programmation linéaire. Nous utiliserons ce que nous aurons dit des contraintes triviales au chapitre précédent pour démontrer le théorème dit : «théorème de dualité». En annexe, nous parlerons rapidement de l'algorithme du cosinus en programmation linéaire. Cet algorithme n'est malheureusement pas applicable, la présence de contraintes triviales interdisant aux procédés de calcul de s'appliquer. Mais sa philosophie est intéressante. La question-clé qu'il pose est la même que celle que pose la méthode de Theil et Van de Panne en programmation quadratique, méthode que nous présenterons au chapitre 5.

La méthode de Theil et Van de Panne est, parmi les méthodes utilisables, la plus simple et celle qui va le plus vite au résultat. Elle aborde le problème par le biais des contraintes et consiste à poser la question : «Quelles contraintes sont liantes au point-solution?» Si on a répondu à cette question, on a réduit le problème de programmation à un problème de maximum lié. Cette méthode exige que la matrice B soit strictement définie positive.

Il faut faire la même hypothèse pour la méthode de la capacité en programmation quadratique, exposée au chapitre 6; elle est l'œuvre de Houthakker. On a étudié ses suggestions, ce qui a conduit à une technique de calcul un peu plus simple. Dans ce chapitre, on a également redressé quelques erreurs de compréhension qui se produisirent à propos de la méthode de Houthakker. La méthode de la capacité est un exemple de méthode paramétrique.

Nous cesserons de faire du calcul algébrique au chapitre 7, dans lequel sera donnée une application des méthodes de Theil et Van de Panne à propos d'un problème pratique, et de quelque intérêt en lui-même. Il s'agit, en gros, de savoir comment un monopoliseur qui peut adapter ses prix va les établir de

façon à rendre maximum son revenu, alors qu'il est soumis à certaines contraintes; parmi ces contraintes, il y a celles qui proviennent des fonctions de demande, et il y a une contrainte paramétrique, dont le paramètre mesure «la possibilité d'une politique». Comme dans la plupart des problèmes pratiques, il n'est pas nécessaire que les données du problème soient toutes rigoureusement exactes lorsqu'on le formule. Nous ajouterons par conséquent une étude de calculs d'erreurs, qui sera faite au chapitre 8. Nous mesurerons la sensibilité d'une solution à des variations dans les données du problème. Nous ne parlerons d'abord que de variations infinitésimales, puis, plus loin, également de variations finies. Cette discussion conduira à tout un ensemble de techniques de solution paramétriques. La théorie sera appliquée à l'exemple donné au chapitre 7. Nous supposerons que les élasticités utilisées dans ce chapitre pour déterminer les fonctions de demande sont des variables aléatoires, ayant une distribution uniforme sur un intervalle certain. On étudiera les conséquences de cette hypothèse au moyen de techniques de simulation plutôt qu'au moyen des techniques habituelles qui supposent que l'on a affaire à des distributions normales de variances et covariances connues.

Tous les algorithmes ainsi étudiés ne sont facilement applicables que si la matrice B de la fonction-objectif est définie positive. En conséquence, on a ajouté un neuvième chapitre dans lequel on présentera un algorithme utilisable même si B n'est que semi-définie positive. Cet algorithme est dû à Dantzig, mais la présentation qui en sera donnée est due à Van de Panne, qui découvrit la méthode indépendamment de Dantzig, très peu de temps après que les résultats trouvés par ce dernier aient été utilisables⁽¹⁾. La méthode est tirée d'un ensemble de méthodes qui permettent de mettre le problème sous la forme requise par la technique du simplexe, puis qui utilisent cette méthode. Les autres algorithmes de cet ensemble sont dus à Barankin et Dorfman, à Frank et Wolfe, et à Wolfe⁽²⁾. Ces méthodes du simplexe sont résumées à la fin du chapitre. Du point de vue du calcul, ce sont les plus efficaces des méthodes utilisables, et elles ont été programmées en vue du calcul sur ordinateurs. On peut lire le chapitre 9 indépendamment des autres.

(1) Voir G.B. DANTZIG : « Quadratic programming, a variant of the Wolfe-Markowitz algorithms », Research report 2 of the Operations Research Center of the University of California; et C. VAN DE PANNE : « A nonartificial method for quadratic programming », Report 6229 of the Econometric Institute of the Netherlands School of Economics. On se reportera aussi à C. VAN DE PANNE et A. WHINSTON : « The simplex and dual method for quadratic programming », Report 6314 of the Econometric Institute of the Netherlands School of Economics.

(2) Voir, en particulier, E.W. BARANKIN et R. DORFMAN, « On quadratic programming », *University of California Publications in Statistics*, vol. 2 (1958), pp. 285 à 318; et M. FRANK et P. WOLFE, « An algorithm for quadratic programming », *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 3 (1956), pp. 193 à 200; et enfin, P. WOLFE, « The simplex method for quadratic programming », *Econometrica*, vol. 27 (1959), pp. 382 à 398.

1.4.3. On rencontrera le concept de *dégénérescence* à plusieurs endroits du livre. Il y a *dégénérescence* quand la solution d'un problème de recherche de maximum ou d'un problème de programmation reste la même, qu'on s'impose ou non une contrainte d'égalité particulière. (Cette contrainte peut être une contrainte d'inégalité satisfaite à l'égalité.) On rencontrera un problème de *dégénérescence* d'abord au paragraphe 2.5.3 en recherchant un maximum lié; on en rencontrera un autre au paragraphe 2.7.5 en étudiant les conditions de Kuhn et Tucker en programmation quadratique, et encore un autre au chapitre 4 qui traite de la programmation linéaire, en particulier aux paragraphes 4.3.2 et 4.5.4. Des parties importantes des chapitres 5 et 6, qui traitent de la programmation quadratique, seront consacrées à la *dégénérescence* et aux complications qu'elle peut entraîner.

Cette dispersion plus ou moins grande ne doit pas cacher les ressemblances très simples de tous ces cas, ressemblances que nous allons répéter. Soit une contrainte d'(in)égalité sous laquelle nous désirons rendre maximum une fonction. En général, cette contrainte d'(in)égalité est gênante; il y a quelque chose que nous voulons rendre maximum, mais la solution doit satisfaire l'(in)égalité; aussi devons-nous faire une analyse plus poussée. Dans les cas de *dégénérescence*, il arrive que nous puissions *ne pas tenir compte* de l'(in)égalité, résoudre donc le problème sans en tenir compte et calculer une solution qui se trouve satisfaire exactement l'(in)égalité.

1.4.4. Pour résumer ce survol de l'ouvrage, disons que nous présenterons un certain nombre d'algorithmes, certains de façon assez détaillée, d'autres de façon plus sommaire. Un certain nombre de cas particuliers seront examinés avec soin : contraintes triviales, *dégénérescence*, dépendance. On donnera une application empirique qui sera étudiée dans ses moindres détails; dans d'autres cas, on donnera des exemples numériques spécialement étudiés pour illustrer quelques points assez délicats. Disons enfin que l'ouvrage est cohérent d'un point de vue mathématique.