C833

IRIA

laboria

laboratoire de recherche
en informatique
et automatique

Contrôle optimal de files d'attente.

M. Robin

Rapport de Recherche n° 117

Mai 1975

Institut de Recherche
d'Informatique
et d'Automatique

aine de Voluceau
ocquencourt
78150 - Le Chesnay
France
Tél.: 954 90 20

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

IST
833

C.L.L 004.32
C833
A
28 JAN.
CENT... ...TIFIQUE
ET TEC... ...ANSFERTS
TECHNOLOGIQUES
B.P. 315 ALGER - GARE

CONTRÔLE OPTIMAL DE FILES D'ATTENTE

M. Robin

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

RESUME

On considère dans cet article, le problème de la détermination du nombre optimal de "serveurs" dans des types classiques de files d'attente : on formule dans chaque cas un problème de contrôle impulsionnel pour un processus de markov associé à la file d'attente. De façon analogue à A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS on obtient des inéquations permettant de caractériser la politique optimale .
Ces conditions d'optimalité ont été résolues numériquement dans des cas particuliers.

Les méthodes utilisées sont applicables à des problèmes où les variables de décisions sont les taux d'arrivées ou de services et à des modèles de files d'attente plus généraux que ceux considérés ici.

ABSTRACT

We consider here the problem of optimal choice of the number of servers for several types of classical queuing systems. For each case we consider an impulse control problem for a markov process associated to the queuing system. As in A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS we obtain inéquations which allow to compute an optimal policy. These inequalities are solved numerically in some particular cases.

The method used can be applied to others problems for which decision variables are the arrival rate or service rate and to queuing model more general than those treated here.

PLAN

0. Introduction

1. Problème M/M/S

   1.1 Présentation heuristique du problème
   1.2 Problème de contrôle
   1.3 Conditions d'optimalité
   1.4 Caractérisation partielle de la politique optimale
   1.5 Applications numériques

2. Problème M/G/1

   2.1 Hypothèses
   2.2 Problème de contrôle
       Conditions d'optimalité
   2.3 Applications numériques
   2.4 Généralisations diverses

Conclusions

Références

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

0. Introduction.

Les modèles du type "file d'attente" sont utilisés dans de multiples applications : gestion de stock et de production, affectation d'équipes de maintenance, systèmes informatiques etc... La multiplicité des modèles rend impossible un traitement général des problèmes de contrôle de files d'attente.

Cependant, il semble que pour tous les cas classiques, on puisse systématiquement se ramener au problème du contrôle d'un processus de markov : une fois précisé le processus de markov que l'on contrôle, la programmation dynamique donne (au moins formellement) une condition suffisante d'optimalité facile à obtenir : on peut alors dans certain cas dégager des propriétés qualitatives de la politique optimale.

Dans le cas où le nombre de "clients" dans le système n'est pas markovien, il semble que cette façon de procéder n'ait pas été envisagée (pour les problèmes de contrôle). A notre connaissance la littérature sur ce sujet restreint les contrôles admissibles, les méthodes utilisées ensuite variant avec les cas envisagés (cf. [24], [2], [4], [12] par exemple).

Ici on se limitera à quelques exemples, les conditions d'optimalité obtenues sont des systèmes d'inéquations sur le coût optimal tout à fait analogues aux IQV introduites par BENSOUSSAN et LIONS [1] pour les diffusions et les mêmes méthodes de résolution numérique leur seront appliquées.

Ces inéquations posent cependant un certain nombre de difficultés théoriques pour lesquelles on renvoie à J.L. LIONS [9].

- Généralités :

Pour décrire complètement le fonctionnement d'un système du type file d'attente il faut préciser les hypothèses faites sur les points suivants :

- nombre d'étape. une étape étant constituée d'une file d'attente et d'un poste de service comportant un ou pluqieurs serveurs.

Il peut y avoir plusieurs étapes en série ou en parallèle (ou les deux).

On ne considerera qu'une seule étape.

- système ouvert ou fermé. dans un système fermé un client sortant d'un poste de service peut éventuellement retourner dans une file d'attente située en amont.
On ne considère ici que des sytèmes ouverts. Mais les méthodes utilisées seraient analogues pour les systèmes fermés.

- Capacité du système. limitée ou non... Quand on a une capacité limitée à Nm, et qu'il y a Nm clients dans le système, toute arrivée ultérieure est refusée.

- Processus d'arrivée. Il peut y avoir plusieurs processus d'arrivées correspondant à plusieurs catégories de "clients".
(on se restreint ici au cas d'une seule file d'attente).
On suppose ici que les arrivées pour un type de client se font individuellement, les intervalles entre arrivées étant indépendantes, équidistribuées, de loi donnée.

- Processus de service. Pour chaque serveur, les temps de services seront des v.a indépendantes, équidistribuées de loi donnée.
et service individuel...

- Discipline dans les files. dans le cas d'une seule catégorie de clients la discipline sera première arrivée, première servie.

- Variables de décision. On peut avoir à contrôler :
- les taux de services (cf. SABETI [18])
- les taux d'arrivées (cf. LOW [17])
- le nombre de serveurs (cf. [2], [13])
- la catégorie de clients que l'on sert dans le cas de deux files d'attente, avec 1 serveur par exemple. (ici on traitera seulement le problème du nombre de serveurs).

- Coûts. On supposera ici que l'on a :
- un coût par unité de temps tenant compte du coût d'attente des clients et des coûts de fonctionnement c'est à dire fonction du nombre de clients et du nombre de serveurs, éventuellement du temps de service du client présent dans le poste.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

- un coût à chaque instant de décision (ex.: coût instantané de changement du nombre de serveurs). Ceci sera précisé par la suite.

Pour pouvoir écrire plus précisément les problèmes de contrôle, il faut construire le processus stochastique correspondant à un contrôle ce qui ne peut être fait que dans chaque cas particulier.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST