

COLLECTION « PROGRAMMATION »
Publiée sous la direction de L. NOLIN

Graphes et questionnaires

par
Claude-François PICARD

Tome 1

Graphes

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
55, quai des Grands-Augustins, Paris-6^e

1972

OUVRAGES DE LA COLLECTION

« PROGRAMMATION »

ARSAC J., LENTIN A., NIVAT M. et NOLIN L. — Algol. Théorie et pratique.

GROSS M. et LENTIN A. — Notions sur les grammaires formelles, 2^e édition.

FAURE R. — Eléments de la recherche opérationnelle. Avec la collaboration de N.S. Gutlot et de M. Bloch. 2^e édition.

NOLIN L. — Formalisation des notions de machines et de programme.

LERMAN I.C. — Les bases de la classification automatique.

FAURE R. et HEURGON E. — Structures ordonnées et algèbres de Boole.

PICARD C.F. — Graphes et questionnaires.

Tome 1. — *Graphes.*

Tome 2. — *Questionnaires.*

©GAUTHIER-VILLARS, 1972

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite" (alinéa 1^{er} de l'Article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

AVANT-PROPOS

Les graphes sont des êtres mathématiques dont la théorie permet l'étude des relations entre les éléments d'un ensemble. Introduits vers 1870 par les pionniers de la combinatoire, qui s'appelaient encore des géomètres, les graphes sont apparus récemment comme les outils les plus adaptés à certains problèmes d'organisation, c'est-à-dire de mise en ordre. Ils sont donc entrés dans le domaine du mathématicien appliqué travaillant sur des structures identifiées intrinsèquement et pouvant servir de modèle à nombre d'applications. Après avoir été utilisés essentiellement en recherche opérationnelle, les graphes se sont introduits dans l'informatique théorique où ils s'imposent en bien des chapitres.

Les questionnaires sont définis comme des graphes valués qui permettent d'élaborer des modèles de choix ou de décision et de traiter une certaine information. La problématique des questionnaires repose sur certains types de graphes, plus spécialement développés au premier tome, et fait appel au langage probabiliste. Aussi, lorsque le formalisme général et les principales opérations de construction auront été acquis, un chapitre sera-t-il consacré exclusivement à la théorie de l'information pour des sources discrètes. De bons ouvrages sur les graphes sont accessibles aux lecteurs français de divers niveaux ; il n'existe qu'extrêmement peu d'ouvrages consacrés en français à la théorie de l'information, ce qui nécessite de la présenter de manière axiomatique et dans un cadre abordable sans difficulté.

Issu de recherches effectuées principalement au sein d'une équipe du Centre National de la Recherche Scientifique, en liaison avec quelques institutions étrangères, notamment aux Etats-Unis et en Allemagne démocratique, l'ensemble des résultats présentés ici fait ou a fait l'objet d'enseignements aux jeunes chercheurs (Diplôme d'Etudes Approfondies) ou aux étudiants des Maîtrises d'Informatique et de Mathématiques et Applications Fondamentales d'Universités parisiennes, mais aussi de cours pour des gens engagés dans les mathématiques appliquées, en France comme à l'étranger (citons Toronto, Prague, Barcelone et Rome).

Le premier tome de cet ouvrage est consacré aux graphes dont il présente, au chapitre 1, la plupart des définitions et propriétés de base. J'utilise les notions de latticiel et de connexité quasi-forte inférieure introduites par Claude Berge (1958) et Bernard Roy (1961) et je travaille de manière systématique sur le concept de graphe tel qu'il est qualifié souvent d'orienté (Berge, 1958) ou de 1-graphe (Berge, 1970) sans refuser pour autant la symétrie, la réflexivité ou la multiplicité des arcs ; cette manière de faire allie rigueur et généralité et conduit souvent à des démonstrations originales et directes. Le chapitre 2 qui

traite de la représentation, offre un moyen de satisfaire le lecteur avide de manipuler convenablement quelques graphes : après quelques exemples informels (§ 2.8) ⁽¹⁾, je donne des indications pour la construction de graphes possédant certaines propriétés (§ 2.9). Schémas et figures sont des supports souvent nécessaires à l'intuition, et le lecteur doit savoir qu'un dessin peut être modélisé par un graphe mais qu'un graphe n'est pas, par essence, un dessin ; il pourra alors personnaliser lui-même ses exemples en "se donnant" lui-même des graphes. Les chapitres 3 et 4, consacrés principalement aux chemins, aux circuits et aux graphes sans circuit permettent l'élaboration de la théorie générale des graphes et la fabrication de l'outillage de base nécessaire aux questionnaires. On y trouvera d'une part des résultats classiques, dus notamment à l'école de Berge, avec Camion, Ghouila-Houri et Roy, d'autre part un certain nombre de résultats nouveaux, souvent non publiés. Le chapitre 5 permet le passage à la valuation des graphes et offre quelques exemples d'algorithmes fondamentaux, sources d'applications en recherche opérationnelle par le truchement de l'informatique. Les deux derniers chapitres du tome I sont consacrés aux aspects opératoires. Présentés sous un mode algébrique, essentiels pour la construction la transformation ou la génération de graphes, ces deux chapitres comportent parfois des résultats très récents qu'aucun livre n'avait encore traités dans leur ensemble. Dans le second tome, ces résultats seront supposés connus.

Le second tome est consacré aux questionnaires. Le but que je m'étais proposé initialement était d'offrir une nouvelle édition de mon livre, imprimé par Gauthier-Villars en 1965, avec une mise à jour des principaux résultats acquis depuis cette date. Mais l'étude des questionnaires latticiels entreprise essentiellement depuis 1967, la réalisation des questionnaires, étudiée notamment par F. Dubail et E. Lüdde, les pseudoquestionnaires de D. Chenais et M. Terrenoire, et l'adjonction d'une fonction de coût (G. et S. Petolla et G.T. Duncan) enrichissaient tellement la problématique des questionnaires qu'elle ne pouvait être désormais exposée convenablement sans reposer sur une base s'étendant des graphes aux espaces probabilisables. Le lecteur familier des questionnaires trouvera quelques modifications aux définitions, termes et symboles les plus usuels (on substitue par exemple la notion de réponse à celle d'éventualité, l'ensemble des questions est noté $F...$) et ne devra pas s'en révolter car cela permet une unification et une généralisation de la théorie dans un cadre à la fois plus large et plus rigoureux. Le premier chapitre du second tome (chapitre 8) est consacré aux propriétés générales des questionnaires et fait la liaison entre valuations a priori de certains graphes et espaces probabilisés. Certains aspects triviaux pour les questionnaires arborescents deviennent délicats dans le cas des latticiels pour lesquels des choix de représentation ou d'interprétation sont possibles. Le chapitre 9 est consacré aux transformations, aux opérations et à la construction des questionnaires. La distribution des probabilités des réponses y joue un rôle prépondérant ; sa suppression conduit cependant à des problèmes nouveaux pour les graphes. J'ai rassemblé au chapitre 10 les propriétés nécessaires et les conditions suffisantes des questionnaires de longueur de cheminement minimale, ce qui donne une nouvelle démonstration de l'algorithme de Huffman, déduite de la construction plus générale que S. Petolla a effectuée lorsque la fonction de coût n'est

(1) Les renvois aux paragraphes et sous-paragraphes portent en tête l'indication de chapitre, ici chapitre 2, paragraphe 8.

pas uniforme. Ce type fondamental d'algorithme, qualifié de processus opérant d'aval en amont est à la base d'une classe étendue de recherches dont la trame figure tout au long de ce tome. Il apparaît en quelque sorte comme le complémentaire des algorithmes apparentés à la programmation dynamique et nécessaires quand des contraintes s'opposent à la réalisation libre du questionnaire de réponses données. L'exposé assez complet de la théorie de l'information pour des sources discrètes est entrepris au chapitre 11. Je fais alors appel à l'information probabiliste de Shannon ou de Renyi, mais je tente de montrer aussi qu'une information liée à un espace mesurable, mais non probabilisable, du type de Kampé de Fériet et Forte peut être aussi utile pour l'étude des processus de traitement. Les chapitres 11 et 12 permettent de retrouver ou de préciser par les questionnaires certains théorèmes classiques sur l'information et mettent en évidence le rôle d'agent optimal de certains questionnaires ; l'information apparaît comme une mesure de la richesse d'un ensemble de réponses que la longueur de cheminement permet d'acquérir au plus juste coût. Le chapitre 13 et le chapitre 14 étendent la théorie en faisant intervenir fonctions économiques, utilité des réponses, coût ou formulation des questions et probabilité d'exactitude des réponses. Les deux aspects de la question y apparaissent nettement : c'est un sommet auquel est attachée une partition d'un ensemble de réponses. Des applications des questionnaires à la programmation, à l'informatique et, par delà, à des disciplines allant des sciences humaines à la médecine, à l'économie et à la gestion sont proposées dans ces deux derniers chapitres où j'ai tenté de conserver l'aspect rigoureux de l'ouvrage en indiquant quelques grandes voies, et exceptionnellement des détails, sans viser à l'exhaustivité.

Les quatorze chapitres comportent presque tous des exercices d'application assez simples et chaque tome s'achève par quelques problèmes dont la solution détaillée offre compléments et précisions. Pour chaque tome, une bibliographie relative à chaque chapitre permet le recours aux sources, l'approfondissement de certaines questions ou l'ouverture à d'autres modes d'expression ; peu de redites y sont faites. On trouvera aussi une bibliographie d'ouvrages collectifs. Les auteurs de théorèmes ou de propositions sont généralement nommés dans le texte et le lecteur trouvera la référence en se reportant à la bibliographie. Cependant j'ai omis le nom de l'auteur lorsqu'il s'agit de résultats qui sont déjà classiques, en théorie des graphes notamment, ou ... pas encore publiés. Chaque tome se termine par un index des définitions et l'indication des principaux symboles employés qui renvoient le lecteur aux numéros de paragraphes correspondant à la première utilisation.

Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les chercheurs et techniciens de l'équipe de recherche Structures de l'Information, du C.N.R.S., avec qui une bonne partie des résultats originaux ont été obtenus, établis et discutés. Je remercie également Louis Nolín d'accueillir ce livre dans la collection Programmation que je suis heureux de voir éditée avec le soin et la qualité renommés de la maison Gauthier-Villars.

Sougy, Août 1971

TABLE DES MATIÈRES

Tome 1 : GRAPHERS

	Pages
AVANT PROPOS	VII
<i>Chapitre 1. Définitions fondamentales.</i>	
1.1. Couples et produits d'ensembles	1
1.2. Notion de graphe	2
1.3. Opérations élémentaires et fermetures transitives	5
1.4. Connexité, équivalence et préordre	8
1.5. Graphes particuliers	11
Exercices	13
<i>Chapitre 2. Représentation d'un graphe.</i>	
2.1. Diverses définitions des graphes	15
2.2. Isomorphisme de graphes	16
2.3. Graphe topologique	16
2.4. Matrices associées	16
2.5. Matrice d'incidence	19
2.6. Listes associées	19
2.7. Représentation d'un graphe dans un ordinateur	19
2.8. Quelques problèmes faisant apparaître les graphes	20
2.9. Comment former un graphe ?	24
<i>Chapitre 3. Chemins, circuits et cocircuits.</i>	
3.1. Chaînes, chemins et degrés	27
3.1.1. Chaînes et concaténation	27
3.1.2. Degrés et chemins maximaux	28

	Pages
3.2. Cocircuits, cocycles et cycles	29
3.3. Matrices cyclomatiques et cocyclomatiques	36
3.4. Propriétés extrémales	38
3.4.1. Forte connexité et absence de circuits	38
3.4.2. Graphe réduit et squelette	40
3.4.3. Graphes et ordres	42
Exercices	43
 <i>Chapitre 4. Latticiels, arborescences et arbres.</i>	
4.1. Latticiels et dedekindiens	45
4.2. Arborescences et arbres	46
4.3. Symétries et coarbres	49
4.4. Propriétés spécifiques	53
4.5. Matrices cyclomatiques et cocyclomatiques fondamentales	55
4.6. Arborescences et informatique	56
4.6.1. Simplexe et arborescence	56
4.6.2. Monoïde et arborescence	57
4.6.3. Chaînes, chemins et procédures arborescentes	58
4.6.4. Codage	59
4.6.5. Graphes finis et graphes infinis	60
Exercices	60
 <i>Chapitre 5. Fonctions, valuations et flots.</i>	
5.1. Fonctions et ensembles de sommets	63
5.1.1. Fonction de Grundy	63
5.1.2. Stabilité et noyau	63
5.2. Valuations et ensembles d'arcs	65
5.2.1. Valuations et marquages	65
5.2.2. Chemins de longueur minimale	66
5.2.3. Recherche de l'arbre maximal d'un graphe connexe	67
5.3. Flots et réseaux de transport	68
5.3.1. Flot maximal	68
5.3.2. Généralisations	69
5.3.3. Problème d'affectation	70
5.3.4. Problèmes d'ordonnancement sur des réseaux de transport	71
Exercices	72
 <i>Chapitre 6. Opérations et transformations de graphes.</i>	
6.1. Définitions générales	73
6.2. Opérations avec conservation des sommets	73

	Pages
6.3. Opérations unaires	74
6.3.1. Types de graphes partiels	74
6.3.2. Opérations unaires	76
6.4. Opérations matricielles	76
6.4.1. Chemins distincts	77
6.4.2. Matrices sur un pseudo-treillis et graphes	78
6.4.3. Algorithme de Warshall	80
6.5. Transformations	84
Exercices	88
 <i>Chapitre 7. Opérations cartésiennes.</i>	
7.1. Produit strict	89
7.2. Principales opérations cartésiennes	93
7.3. Propriétés algébriques	96
7.4. Classes de sommets	103
7.4.1. Partition des sommets	103
7.4.2. Structure des classes de sommets	106
7.4.3. Décompte des sommets	107
7.5. Connexités	109
7.5.1. Produit strict	109
7.5.1.1. Produit strict de graphes fortement connexes	110
7.5.1.2. Produit strict de graphes qfci	111
7.5.2. Somme	113
7.6. Valuations	114
7.7. Opérations latticielles	116
Exercices	118
 <i>Problèmes</i>	
Enoncés	121
Solutions	123
 <i>Bibliographie</i>	 129
<i>Index</i>	141
<i>Principaux symboles</i>	145