



N°d'ordre :

**UNIVERSITE DE M'SILA**  
**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET**  
**L'INFORMATIQUE**

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister**

**Spécialité: Mathématiques**

**Analyse Fonctionnelle et Numérique. Option :**

**Par**

**NADJI NADJET**

**SUJET**

**Factorisation des opérateurs multilinéaires  
faiblement compacts entre espaces de Banach**

**Soutenu publiquement le : 04/07/2011 devant le jury composé de :**

ACHOUR Dahmane	MC.A	Université de M'sila	Président
MEZRAG Lahcène	Prof	Université de M'sila	Rapporteur
BEDOUHENE Fazia	MC.A	Université de Tizi ousou	Examineur
SAADI Khalil	MC.B	Université de M'sila	Examineur
TIAIBA A.Moumen	MC.B	Université de M'sila	Examineur

Promotion :2008/2009

## Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Monsieur **L. MEZRAG** qui m'a permis d'approcher le monde de la recherche en acceptant de diriger mon travail et m'a fait profiter de son expérience et de ses connaissances mathématiques et sa compétence scientifique, ainsi que ses discussions fructueuses m'ont été d'une aide précieuse .

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à Monsieur **K.SAADI** qui m'a proposé de faire cette thèse et m'a aidé à réaliser par encadrement exemplaire.

Mes plus remerciements s'adressent à Monsieur **D. ACHOUR** maître de conférences à l'université de Med Boudiaf de M'sila pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance de ce mémoire .

J'exprime enfin remerciements aux honorables membres du jury de soutenance madame **F. BEDOUHANE** de l'université de Tizi ousou ,et Monsieur **A . TIAIBA** de l'université de M'sila.

هذه المذكرة تدرج في إطار التحليل متعدد الخطية الذي يهتم بنظرية تفكيك المؤثرات المتعددة الخطية و كثيرات الحدود المتجانسة ضعيفة التراص من الدرجة  $m$ . نقوم بتعميم بعض النظريات من الحالة الخطية إلى الحالة المتعددة الخطية، كما أن هناك بعض الاستنتاجات التي تقودنا إلى نتائج مهمة.

### Résumé

Le mémoire se situe dans le cadre de l'analyse multilinéaire. Il porte essentiellement sur les théorèmes de factorisation des opérateurs multilinéaires et polynômes homogènes faiblement compacts. On généralise certains résultats de cas linéaires au cas multilinéaire et polynôme.

### Abstract

In this work, we study the space of weakly compact multilinear operators and homogeneous polynomials. We extend certain results of linear case to the multilinear and polynomial cases.

**Key words:** weakly compact multilinear operators, weakly Compact homogeneous polynomials, reflexive space, factorization of multilinear operators.

**NOTATIONS**

- $H$  espace de Hilbert.
- $C(K)$  espaces des fonctions  
continues sur compact à valeurs réelles.
- $X'$  le dual topologique.
- $\text{conv}(C)$  enveloppe convexe.
- $J_X$  INJECTION CANONIQUE.
- $\sigma(X, X')$  la topologie faible.
- $\sigma(X', X)$  la topologie  $*$  faible.
- $W(X, Y)$  l'espace des opérateurs linéaires  
faiblement compact.
- $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$  l'espace des opérateurs m-  
linéaires.
- $G$  espace réflexif.
- $Q(X)$  le dual de  $P(X)$

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Résultats préliminaires et caractérisation des espaces réflexifs</b>	<b>5</b>
1.1	Espaces de Banach classiques . . . . .	5
1.2	Applications linéaires bornées . . . . .	9
1.3	Théorème de Hahn-Banach et leurs conséquences . . . . .	10
1.3.1	Forme analytique du théorème de Hahn Banach . . . . .	12
1.3.2	Forme géométrique du théorème de Hahn Banach . . . . .	12
1.4	Espace de Banach réflexif . . . . .	13
1.5	Caractérisation topologique des espaces réflexifs . . . . .	20
1.5.1	La topologie faible et $*$ -faible . . . . .	20
1.5.2	Suites faiblement convergentes . . . . .	23
1.5.3	Espaces séparables . . . . .	25
1.5.4	Caractérisation au sens de James . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Factorisation des opérateurs multilinéaires faiblement compacts</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	29
2.2	Opérateurs linéaires faiblement compacts . . . . .	29
2.2.1	Relation avec l'opérateur adjoint . . . . .	30
2.2.2	Factorisation des opérateurs linéaires faiblement compacts . . . . .	32
2.3	Opérateurs multilinéaires faiblement compacts . . . . .	35
2.3.1	Définitions préliminaires . . . . .	35

2.3.2	Factorisation du premier type; la classe $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ . . . . .	39
2.3.3	Caractérisation $m$ -linéaire d'un espace réflexif . . . . .	40
2.3.4	Factorisation de deuxième type; la classe $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Polynômes homogènes faiblement compacts</b>	<b>46</b>
3.1	Introduction . . . . .	46
3.2	Préliminaires sur les polynômes . . . . .	46
3.3	Polynômes homogènes faiblement compacts . . . . .	49
3.4	Polynômes homogènes de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{P}$ . . . . .	50
3.5	Polynômes homogènes de type $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ . . . . .	54