

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR

BATNA (ALGERIE)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématique

Par

DOUADI DRIHEM

THEME

**LA MULTIPLICATION PONCTUELLE DANS CERTAINS
ESPACES DE BESOV ET DE LIZORKIN-TRIEBEL**

Soutenu le : 01/07/2007

Devant le jury d'examen

Mr. K. MESSAOUDI	Prof.	Université de Batna	Président
Mr. M. MOUSSAI	Prof.	Université de M'sila	Directeur de thèse
Mr. A. AIBECHÉ	Prof.	Université de Sétif	Examineur
Mr. R. BENACER	Prof.	Université de Batna	Examineur
Mr. L. MEZRAG	M.C.	Université de M'sila	Examineur
Mr. M. NADIR	Prof.	Université de M'sila	Examineur

Résumé

On s'intéresse aux conditions sur les paramètres $s, p, p_1, p_2, q, q_2, r$ pour obtenir les inclusions suivantes

$$F_{p_1}^{s,q} \cdot F_{p_2}^{r,q_2} \hookrightarrow F_p^{s,q}, \quad F_{p_1}^{s,q} \cdot B_{p_2}^{r,q_2} \hookrightarrow F_p^{s,q} \quad \text{et} \quad B_{p_1}^{s,q} \cdot B_{p_2}^{r,q_2} \hookrightarrow B_p^{s,q}.$$

On applique ces résultats à la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces $F_p^{s,q}$. On étudie la multiplication sous la forme

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3, \quad (f_i \in B_{p_i}^{s_i, q_i} \text{ ou } F_{p_i}^{s_i, q_i}, i = 1, 2, 3).$$

On étudie également la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Campanato et de Bessel-Sobolev.

Mots-clefs: Espaces de Besov, Espaces de Bessel-Sobolev, Espaces de Campanato, Espaces de Lizorkin-Triebel, Opérateurs pseudo-différentiels, Multiplication ponctuelle.

2000 Mathematics Subject Classification: 46E35

Abstract

We interest on the conditions on the parameters $s, p, p_1, p_2, q, q_2, r$, such that the embeddings

$$F_{p_1}^{s,q} \cdot F_{p_2}^{r,q_2} \hookrightarrow F_p^{s,q}, \quad F_{p_1}^{s,q} \cdot B_{p_2}^{r,q_2} \hookrightarrow F_p^{s,q} \quad \text{and} \quad B_{p_1}^{s,q} \cdot B_{p_2}^{r,q_2} \hookrightarrow B_p^{s,q},$$

hold and their applications into the continuity of pseudodifferential operators on the spaces $F_p^{s,q}$. We study the multiplication of types

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3, \quad (f_i \in B_{p_i}^{s_i, q_i} \text{ or } F_{p_i}^{s_i, q_i}, i = 1, 2, 3).$$

Also we study the continuity of pseudodifferential operators on Campanato spaces and the Bessel-Sobolev spaces.

Keywords: Besov spaces, Bessel-Sobolev spaces, Campanato spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Pseudodifferential operators, Pointwise multiplication.

2000 Mathematics Subject Classification: 46E35

Table des matières

INTRODUCTION	3
NOTATIONS	7
CHAPITRE I	
Quelques résultats préliminaires	9
1.1. Séries de Littlewood-Paley	9
1.2. Décomposition de $\Delta_k(f \cdot g)$	10
1.3. Espaces de Besov et espaces de Lizorkin-Triebel	11
1.4. Quelques inégalités	15
CHAPITRE II	
Multiplication du type F·B	26
2.1. Les inclusions de Runst-Sickel	26
2.2. Multiplication du type mixte F·B	29
2.3. Le cas limite $s + r = n((1/p_1) + (1/p_2) - 1)_+$	40
CHAPITRE III	
Multiplication du type F·B·B	46
3.1. Décomposition du paraproduit	46
3.2. Le cas $s_1 > 0$	48
3.3. Le cas $s_1 < 0$	51
3.4. Le cas $s_1 = 0$	64
3.5. Commentaire	66
CHAPITRE IV	
Application, continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Lizorkin-Triebel	67
4.1. Préparations	67

4.2. Théorèmes de continuité.	73
4.3. Un contre-exemple.	76
CHAPITRE V	
Multiplication dans les espaces de Campanato	79
5.1. Définitions et quelques propriétés	79
5.2. Deux théorèmes principaux	85
5.3. Preuve du premier théorème	86
5.4. Preuve du deuxième théorème.	92
Bibliographie	99
ANNEXE I	
Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Bessel-	
Sobolev	101
1. Notations.	101
2. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels	103
Bibliographie	111
ANNEXE II	
Problèmes ouverts	113