



N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTÉ DES SCIENCES ET SCIENCES DE
L'INGÉNIEUR

Département de Mathématiques
MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : *Mathématiques*
Option : *Analyse Fonctionnelle*

Par
SEGHIRI FAKHREDDINE

SUJET

**FACTORISATION DES OPÉRATEURS NON LINEAIRES
À VALEURS DANS L'ESPACE L_0
PAR DES ESPACES FONCTIONNELS**

Soutenu publiquement le 29/04/09 devant le jury composé de :

Mr. B. BOUDERAH	Prof. Université de M'SILA	Président
Mr. L. MEZRAG	Prof. Université de M'SILA	Rapporteur
Mr. A. ZIADI	Prof. Université de SETIF	Examineur
Mr. D. ACHOUR	M.C. Université de M'SILA	Examineur

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans la problématique des théorèmes de factorisation des opérateurs non linéaires, en particulier dans le sens de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes d'une généralisation des opérateurs linéaires aux opérateurs sous linéaires et quasi linéaires.

Plusieurs études ont abordé les problèmes de factorisation des opérateurs linéaires à valeur dans l'espace de fonction L_0 par un espace fonctionnel, parmi ces espaces on trouve l'espace de Lebesgue L_p et l'espace $L_{p,\infty}$.

Le travail principale de cette thèse est d'essayer de généraliser quelques travaux déjà faits sur les théorèmes de factorisation. D'une part on généralise l'espace de Lebesgue et l'espace $L_{p,\infty}$ à des espaces fonctionnels classiques comme celui d'Orlicz avec sa fonction de Young, à l'espace de Lorentz classique et aussi pour l'espace d'Orlicz-Lorentz. D'autre part on va voir sous quelle condition le passage (la généralisation) d'un opérateur linéaire à un sous linéaire (ou à un quasi linéaire) reste vrai.

Pour cela, nous avons utilisé des outils donnés dans la première partie de cette thèse concernant la géométrie des espaces quasi-Banach et les opérateurs sous linéaires et quasi linéaires et à l'aide de concept des ensembles définis en termes d'espaces fonctionnels de suites.

La généralisation de quelques théorèmes de factorisation de Maurey

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & L_0(\Omega, \mu) \\
 \tilde{u} \searrow & & \nearrow M_g \\
 & & L_p(\Omega, \mu)
 \end{array}$$

où \tilde{u} est un opérateur linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$, et M_g désigne l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g , sera le but de la deuxième partie de cette thèse. on essaie de voir s'il ya une possibilité d'une telle

généralisation à l'espace d'Orlicz L_φ avec φ une fonction de Young, en d'autre terme on a un factorisation de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & L_0(\Omega, \mu) \\ \tilde{u} \searrow & & \nearrow M_g \\ & & L_\varphi(\Omega, \mu) \end{array}$$

Aussi la généralisation de théorème de Nikishin pour les opérateur linéaires

$$X \xrightarrow{\tilde{u}} L_{p,\infty}(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_g} L_0(\Omega, \mu)$$

ainsi que celle de Wojtaszczyk pour les opérateurs quasi linéaires qui sera le contenu de la troisième partie, où on généralise l'espace $L_{p,\infty}$ (L_p - faible) à l'espace classique de Lorentz $\Lambda_p(\omega)$ avec ω un poids, on réalise la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & L_0(\Omega, \mu) \\ \tilde{u} \searrow & & \nearrow M_g \\ & & \Lambda_p(\omega) \end{array}$$

De la deuxième et la troisième partie on va essayer de voir une généralisation à l'espace d'Orlicz-Lorentz $\Lambda_{\omega,\varphi}$, en d'autre terme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & L_0(\Omega, \mu) \\ \tilde{u} \searrow & & \nearrow M_g \\ & & \Lambda_{\omega,\varphi}(\Omega, \mu) \end{array}$$

AMS classification: 46B40, 46B42, 47B60, 47B65.

Mots clés: factorisation, fonction de Young, espace d'Orlicz, espace de Lorentz, espace Lorentz-Orlicz, opérateur sous-linéaire, opérateur quasi-linéaire.

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Les opérateurs non linéaires	8
1.1	Espace quasi-Banach lattice	8
1.2	L'espace des fonctions	10
1.3	Les opérateurs non linéaires	14
2	Factorisation des opérateurs à valeur dans L_0 par l'espace L_φ	21
2.1	Préliminaires	22
2.1.1	Fonction de Young	23
2.1.2	Espace d'Orlicz $L_\varphi(\Omega, \mu)$	24
2.2	Théorèmes de factorisation des opérateurs	26
2.2.1	Factorisation des opérateurs linéaires dans L_0 par L_φ	26
2.2.2	Factorisation des opérateurs sous-linéaires dans L_0 par L_φ	32
2.2.3	Relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires	35
3	Théorèmes de factorisation par l'espace $L_{p,\infty}(w)$	38
3.1	Factorisation des opérateurs quasi-linéaires dans L_0 par $L_{p,\infty}$	38
3.1.1	Introduction	38
3.1.2	Equivalence de Mesures	41
3.1.3	Classe d'espaces	43
3.2	Factorisation des opérateurs quasi-linéaires dans L_0 par $L_{p,\infty}(w)$	45

3.2.1	Théorèmes de factorisation par l'espace de Poids	45
3.2.2	Factorisation des opérateurs quasi-linéaires invariants par translation dans L_0 par $L_{p,\infty}(w)$	47
3.2.3	Applications	49
4	Théorèmes de factorisation et l'espace de Lorentz classique $\Lambda_p(w)$	53
4.1	L'espace de Lorentz classique $\Lambda_p(w)$	54
4.1.1	Définitions et propriétés	54
4.1.2	Caractérisation de l'espace $\Lambda_p(w)$	55
4.2	Factorisation des opérateurs quasi linéaires dans L_0 par $\Lambda_{p,\infty}(w)$	57
4.2.1	Classes d'espaces des fonctions monotones	57
4.2.2	Théorèmes de Factorisation des opérateurs quasi-linéaires dans L_0 par $\Lambda_{p,\infty}(w)$	59
5	Théorèmes de factorisation et l'espace de Lorentz-Orlicz $\Lambda_{\omega,\varphi}$	66
5.1	Espace d'Orlicz-lorentz $\Lambda_{\omega,\varphi}$	66
5.2	Factorisation des opérateurs sous linéaires de X dans L_0 par $\Lambda_{\omega,\varphi}$	69