

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

THÈSE DE DOCTORAT

en Mathématiques Appliquées

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

NOUVELLES CONDITIONS ET NOUVELLES ESTIMATIONS DE LA STABILITÉ
DES CHAÎNES DE MARKOV
APPLICATION AUX MODÈLES STOCHASTIQUES DE GESTION DES STOCKS

Présentée par :
BOUALEM RABTA

Devant le jury composé de Messieurs :

| | | | |
|-----------------------------|------------------------|-------------------------------------|-------------------|
| Mohammed Said Radjef | <i>Professeur</i> | <i>Université de Béjaia</i> | Président |
| Djamil Aïssani | <i>Professeur</i> | <i>Université de Béjaia</i> | Rapporteur |
| Lyazid Abbaoui | <i>Professeur</i> | <i>Université de Sétif</i> | Examineur |
| Zahir Mohdeb | <i>Professeur</i> | <i>Université de Constantine</i> | Examineur |
| Brahim Mezerdi | <i>Professeur</i> | <i>Université de Biskra</i> | Examineur |
| Djamel Hamadouche | <i>Maître de Conf.</i> | <i>Université de Tizi Ouzou</i> | Examineur |
| Nicolay V. Kartashov | <i>Professeur</i> | <i>Université de Kiev (Ukraine)</i> | Invité |

02 Mai 2006

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | 1 |
| Partie I. Stabilité des chaînes de Markov | 5 |
| Introduction | 7 |
| Chapitre 1 Stabilité Absolue | 11 |
| 1.1 Préliminaire et notations | 11 |
| 1.1.1 M -matrices | 12 |
| 1.1.2 Inverses généralisés | 13 |
| 1.1.3 Valeurs propres | 14 |
| 1.2 Stabilité des chaînes finies | 14 |
| 1.2.1 Stabilité absolue | 14 |
| 1.2.2 Stabilité relative | 15 |
| 1.2.3 Stabilité uniforme | 17 |
| 1.3 Bornes de perturbation | 17 |
| 1.3.1 Inverses généralisés | 17 |
| 1.3.2 Coefficient d'ergodicité | 21 |
| 1.3.3 Valeurs propres | 22 |
| 1.3.4 Sous-matrice principale de $I - P$ | 23 |
| 1.3.5 Temps moyens de premier passage | 24 |
| 1.4 Comparaison | 25 |
| Chapitre 2 Stabilité forte | 29 |
| 2.1 Préliminaire et notations | 29 |
| 2.2 Récurrence au sens de Harris | 31 |
| 2.3 Ergodicité uniforme | 32 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 2.4 | Stabilité forte | 33 |
| 2.5 | Estimations de l'ergodicité et de la stabilité | 34 |
| 2.6 | v -Stabilité forte d'une chaîne de Markov | 37 |
| 2.7 | Application à la chaîne $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$ | 38 |
| Chapitre 3 Estimations de la stabilité forte | | 41 |
| 3.1 | Opérateur fondamental | 41 |
| 3.2 | Inverse de Drazin - groupe inverse | 44 |
| 3.3 | Décomposition du noyau de transition | 48 |
| 3.4 | Coefficient d'ergodicité | 49 |
| 3.5 | Estimation de l'erreur relative | 56 |
| 3.5.1 | Opérateur fondamental | 56 |
| 3.5.2 | Groupe inverse | 57 |
| 3.5.3 | Coefficient d'ergodicité | 57 |
| 3.6 | Comparaison | 57 |
| Chapitre 4 Chaînes discrètes : Résultats et comparaison | | 59 |
| 4.1 | Préliminaire et notations | 60 |
| 4.2 | Stabilité forte par rapport à la norme $\ \cdot\ _1$ | 62 |
| 4.2.1 | Matrice fondamentale | 64 |
| 4.2.2 | Groupe inverse | 66 |
| 4.2.3 | Temps moyen de premier passage | 67 |
| 4.2.4 | Décomposition de la matrice de transition | 71 |
| 4.2.5 | Coefficient d'ergodicité | 74 |
| 4.2.6 | Chaînes finies | 76 |
| 4.2.7 | Discussion des résultats | 76 |
| 4.3 | v -stabilité forte des chaînes discrètes | 79 |
| 4.3.1 | Décomposition de la matrice de transition | 79 |
| 4.3.2 | Matrice fondamentale | 79 |
| 4.3.3 | Groupe inverse | 80 |
| 4.3.4 | Temps moyen de premier passage | 81 |
| 4.3.5 | Estimation de la moyenne pour une chaîne finie | 82 |
| 4.3.6 | Discussion des résultats | 82 |
| Chapitre 5 Ergodicité géométrique | | 83 |
| 5.1 | Préliminaire et notations | 83 |

| | | |
|-----|--|----|
| 5.2 | Ergodicité géométrique | 86 |
| 5.3 | Fonctions de Lyapunov | 86 |
| 5.4 | Stabilité des chaînes géométriquement ergodiques | 87 |

Partie II. Gestion des stocks **91**

Introduction **93**

Chapitre 6 Les systèmes de gestion des stocks **95**

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | La fonction des stocks | 95 |
| 6.2 | La gestion des stocks | 96 |
| 6.3 | Les éléments de la gestion des stocks | 97 |
| 6.4 | Règles de contrôle | 103 |
| 6.5 | Analyse ABC (de Pareto) | 104 |

Chapitre 7 Modèles déterministes de gestion des stocks **105**

| | | |
|-------|--|-----|
| 7.1 | Modèle de la quantité économique de commande | 105 |
| 7.1.1 | Modèle de base | 105 |
| 7.1.2 | Délai de commande | 107 |
| 7.1.3 | Analyse de sensibilité | 108 |
| 7.1.4 | Taux de production fini | 109 |

Chapitre 8 Modèles stochastiques de gestion des stocks **111**

| | | |
|-------|---|-----|
| 8.1 | Le problème du marchand de journaux | 111 |
| 8.1.1 | Le modèle de base | 111 |
| 8.1.2 | Extensions | 112 |
| 8.2 | Le problème à horizon infini | 112 |
| 8.2.1 | Notations | 112 |
| 8.2.2 | Les processus régénératifs | 115 |
| 8.2.3 | Systèmes à revue continue | 117 |
| 8.2.4 | Systèmes à revue périodique | 125 |
| 8.2.5 | Politique optimale | 135 |

Partie III. Stabilité des modèles de gestion des stocks **139**

Introduction **141**

| | | |
|--------------------|--|------------|
| Chapitre 9 | v-stabilité forte du modèle (R, s, S) | 145 |
| 9.1 | Le modèle | 145 |
| 9.1.1 | Probabilités de transition | 146 |
| 9.1.2 | Probabilités stationnaires | 148 |
| 9.2 | v -stabilité forte | 149 |
| 9.2.1 | Déviations de la matrice de transition | 151 |
| 9.2.2 | Erreur sur la norme du vecteur stationnaire | 152 |
| 9.2.3 | Erreur relative | 154 |
| 9.2.4 | Erreur sur les probabilités stationnaires individuelles | 155 |
| 9.2.5 | Erreur sur le stock moyen | 155 |
| 9.3 | Perturbation du niveau de commande | 156 |
| 9.3.1 | Déviations de la matrice de transition | 156 |
| 9.3.2 | Erreur sur la norme du vecteur stationnaire | 158 |
| 9.4 | Exemple numérique | 159 |
| Chapitre 10 | v-stabilité forte du modèle (s, S) | 161 |
| 10.1 | Le modèle (s, S) classique | 161 |
| 10.1.1 | Probabilités de transition | 162 |
| 10.1.2 | Probabilités stationnaires | 163 |
| 10.1.3 | v -stabilité forte | 164 |
| 10.2 | Perturbation de la loi de demande | 167 |
| 10.2.1 | Déviations de la matrice de transition | 167 |
| 10.2.2 | Erreur sur la norme de la distribution stationnaire | 168 |
| 10.2.3 | Erreurs sur les probabilités stationnaires individuelles | 169 |
| 10.2.4 | Erreur sur le stock moyen | 169 |
| 10.3 | Approximation du modèle TMT | 170 |
| 10.3.1 | Le modèle (s, S) avec TMT | 170 |
| 10.3.2 | Déviations de la matrice de transition | 171 |
| 10.3.3 | Erreur sur la norme de la distribution stationnaire | 173 |
| 10.3.4 | Erreurs sur les probabilités stationnaires individuelles | 173 |
| 10.3.5 | Erreur sur le stock moyen | 174 |
| Chapitre 11 | Stabilité absolue du modèle (R, s, S) | 175 |
| 11.1 | Inégalités de stabilité pour le système (R, s, S) | 175 |
| 11.1.1 | Perturbation de la loi de demande | 176 |
| 11.1.2 | Perturbation du niveau de commande | 178 |

| | |
|----------------------------------|------------|
| 11.2 Exemple numérique | 180 |
| Conclusion générale | 185 |
| Bibliographie | 189 |

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, de nouvelles conditions de stabilité et de nouvelles bornes de perturbation pour les chaînes de Markov sont obtenues.

Dans un premier temps, nous avons précisé les conditions de stabilité des chaînes de Markov à espace d'états général après perturbation de leurs noyaux de transition. Sous ces conditions, nous avons obtenu des bornes supérieures de la déviation de la norme de la distribution stationnaire par rapport à différentes quantités.

Nous avons fait le lien entre la méthode de stabilité forte et la méthode de stabilité absolue. Nous avons alors généralisé plusieurs résultats du cas d'un espace d'état fini au cas d'un espace d'état dénombrable. En particulier, nous avons obtenu des bornes supérieures pour la déviation absolue et relative des composantes individuelles du vecteur stationnaire d'une chaîne de Markov discrète à espace d'états fini ou dénombrable.

Nous avons également montré que sous certaines conditions, une chaîne de Markov géométriquement ergodique est fortement stable par rapport à une certaine norme, notamment, lorsque la condition de Lyapunov est satisfaite. Nous avons alors obtenu des estimations quantitatives de stabilité pour ces chaînes.

Dans un deuxième temps, nous avons appliqué certains résultats de la théorie de stabilité forte à l'étude de la sensibilité des modèles stochastiques de gestion des stocks aux perturbations dans leurs paramètres. Enfin, nous avons conçu un programme informatique pour tester numériquement la performance des résultats et les comparer.

Mots-clés : Chaîne de Markov, Perturbation, Stabilité, Estimations quantitatives, Gestion des stocks.

ABSTRACT

In this thesis, new conditions for the stability and new perturbation bounds for Markov chains are obtained.

First, we have precised the conditions for the stability of Markov chains with general state space after perturbation of their transition kernels. Under these conditions, we have derived perturbation bounds for the deviation of the norm of the stationary distribution with respect to different quantities.

We have made the connection between the strong stability method and the absolute stability method. We have then, generalized several results from the case of finite state space to the case of denumerable state space. In particular, we have derived several perturbation bounds for the absolute and relative deviation of the individual components of the stationary vector of a discrete Markov chain with states in a finite or denumerable space.

We have shown that under some conditions, a geometrically ergodic Markov chain is strongly stable with respect to some norm. In particular, when the Lyapunov condition is satisfied. Then, we have obtained quantitative stability estimates for these chains.

We have applied some of the stability theory results to the study of the sensitivity of stochastic inventory models to the perturbations in their parameters. We have constructed a computer program to test numerically the performance of the results and to compare them.

Keywords : Markov chain, Perturbation, Stability, Quantitative estimates, Inventory control.