

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

MÉMOIRE DE MAGISTER

En
Mathématiques Appliquées
Option
Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème
Méthode de support pour la minimisation
d'une fonctionnelle quadratique convexe

Présenté par :
M^{me} Abassi Nacéra née Ikheneche

Devant le jury composé de :

Président	M ^r D. AÏSSANI	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Rapporteur	M ^r M.O. BIBI	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Examineur	M ^r M.S. RADJEF	Professeur	U. A/Mira Béjaïa.
Examineur	M ^r M.S. AIDENE	Maître de conf.	U.M.M. Tizi-Ouzou.

Béjaïa, 2004.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Rappels sur la programmation quadratique convexe	7
1.1 Propriétés des formes quadratiques semi-définies positives	7
1.1.1 Gradient et Hessien d'une forme quadratique	8
1.1.2 Formes quadratiques définies et non définies	10
1.1.3 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies	11
1.1.4 Propriétés des matrices définies positives et non négatives	13
1.2 Convexité	13
1.2.1 Ensembles convexes	13
1.2.2 Propriétés des ensembles convexes	14
1.2.3 Polyèdre convexe et Polytope	14
1.2.4 Fonctions convexes	15
1.2.5 Propriétés des fonctions convexes	16
1.3 Programmation non linéaire.	17
1.3.1 Position du problème et définitions	17
1.3.2 Conditions nécessaires de minimalité locale	19
1.3.3 Conditions suffisantes de minimalité locale	21
1.3.4 Conditions nécessaires de minimalité de Karush-Kuhn-Tucker	21
1.4 Programmation convexe	26
1.4.1 Problème quadratique convexe (P.Q.C.)	28
1.5 Résolution d'un P.Q.C. Méthode du Simplexe Quadratique de Wolfe (1959)	28
1.5.1 Introduction	28
1.5.2 Cas d'un P.Q.C. standard	28
1.5.3 Algorithme	30
1.5.4 Exemple Numérique	31
1.5.5 Système d'optimalité pour un P.Q.C. à variables bornées	34
1.6 Dualité en programmation quadratique convexe.	35
1.6.1 Dualité en programmation convexe	35
1.6.2 Le problème quadratique convexe standard	37
1.6.3 Le problème quadratique convexe à variables bornées	39

2	Méthode directe de support pour la résolution d'un P.Q.C. standard	41
2.1	Introduction	41
2.2	Position du Problème et Définitions	41
2.3	Formule d'Accroissement de la Fonction Objectif	43
2.4	Critère d'Optimalité	44
2.5	Critère de Suboptimalité	46
2.6	Méthode de Résolution	47
2.6.1	Algorithme de résolution	48
2.6.2	Finitude de la méthode	50
2.7	Algorithme de la méthode	51
2.8	Exemple Numérique	52
3	Optimisation par la méthode adaptée d'un problème linéaire-quadratique convexe à variables bornées	55
3.1	Introduction	55
3.2	Position du Problème et Définitions	55
3.3	Formule d'Accroissement de la Fonction Objectif	57
3.4	Critère d'optimalité	58
3.5	Critère de Suboptimalité	60
3.6	Méthode de résolution	61
3.6.1	Définitions	61
3.6.2	Construction d'une direction d'amélioration adaptée	61
3.6.3	Changement de plan	62
3.6.4	Estimation de suboptimalité	63
3.6.5	Changement de support	64
3.6.6	Algorithme de Résolution	65
3.6.7	Exemple Numérique	66
	Conclusion générale	71
	Bibliographie	72

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, une synthèse des travaux classiques sur la programmation quadratique convexe a été réalisée. La méthode du simplexe quadratique de Wolfe a été présentée, puis illustrée par un exemple numérique. D'autre part, la méthode directe de support de R.Gabassov et F.M. Kirillova a fait l'objet d'une description détaillée.

Dans ce travail, une méthode de programmation quadratique convexe à variables bornées a été proposée, basée sur la simplification de la matrice de la fonction objectif, alors qu'auparavant cette dernière a été définie comme une matrice par blocs, difficile à manipuler dans les calculs numériques. La norme utilisée ici dans la construction de la direction d'amélioration n'est pas celle du simplexe. Il s'agit d'une nouvelle norme, adaptée aux spécificités et aux contraintes du problème d'optimisation étudié.

Mots clés : Convexité, Formes quadratiques, Programmation quadratique convexe, Méthode de support, Critère de suboptimalité, Direction d'amélioration adaptée.

ABSTRACT

In this report, the synthesis of the classical work on the convex quadratic programming has been realized. The Wolfe quadratic simplex method has been presented and illustrated by a numerical example. On the other hand the direct support method of R.Gabassov and F.M. Kirillova has been described in details.

In this work, a method for a convex quadratic programming with bounded variables has been proposed. It's based on simplification of the objective function matrix. The used norm in the construction of the amelioration direction is not the one of the simplex. In fact it is a new norm adapted to the specificities and the constraints of the optimization problem.

Keywords : Convexity, Quadratic forms, Convex Quadratic Programming , Support Method, Suboptimality criteria , Adaptive amelioration direction.