

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université M'hamed BOUGARA - BOUMERDES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Magister
Spécialité : Mathématiques
Option : Modèles stochastiques

Thème

**Discrétisations et résolutions numériques des équations
différentielles stochastiques rétrogrades**

Présenté par

ZITOUNI Mahieddine

Soutenu publiquement le :

Devant le jury composé de :

Président :	GUERBYENNE Hafida	Maître de Conférences. Classe A	USTHB - Alger
Promoteur :	KHALDI Khaled	Maître de Conférences. Classe A	Umhb - Boumerdes
Co-Promoteur :	ABASSOV Assim	Maître de Conférences. Classe A	Umhb - Boumerdes
Examineur :	OURBIH Megdoua	Maître de Conférences. Classe A	U.A. Mira - Bejaia
Examineur :	OSMANOV Hamid	Professeur	Umhb - Boumerdes

Année universitaire 2009 - 2010

Sommaire

Introduction Générale	6
Résumé	8
 CHAPITRE 1 : Généralités, Le Mouvement Brownien, Intégrale stochastique et la topologie de Skorkhod	
1.1 Généralités	11
1.1.1 Tribus.....	11
1.1.2 Filtration.....	11
1.1.3 Processus aléatoires, Fonctions Mesurables et progressivement mesurables	12
1.1.4 Processus Adaptés	13
1.1.5 Martingales continues	14
1.1.6 Martingales discrètes	14
1.1.7 Temps d'arrêt	14
1.1.8 Processus de Markov	16
1.2 Le Mouvement Brownien	16
1.2.1 Propriétés trajectorielles du mouvement Brownien	18
1.2.2 Propriété de Markov	19
1.2.3 Construction du Mouvement Brownien	20
1.2.4 Temps d'atteinte (Cas de Brownien)	22
1.2.5 Le Mouvement Brownien géométrique	23
1.2.6 Le Mouvement Brownien multidimensionnel	23
1.2.7 Le Mouvement Brownien généralisé	23
1.3 Intégrale stochastique	23
1.3.1 Processus d'ito	24
1.3.2 Représentation des martingales browniennes	26
1.4 La topologie de Skorkhod	27
1.4.1 Le cas déterministe	27
1.4.2 Le cas des processus aléatoires	27

Chapitre2 : Équations différentielles stochastiques et équations différentielles stochastiques rétrogrades.

2.1- Equations différentielles stochastiques.....	30
2.1.1 Existence et unicité de la Solution.....	31
2.1.2 Propriété de Markov.....	31
2.1.3 Martingale exponentielle.....	32
2.1.4 Représentation probabiliste de solutions d'équations aux dérivées partielles. Formule de Feynman-Kac.....	32
2.2 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.....	34
2.2.1 Existence et unicité de la solution.....	36
2.2.2 Existence de la solution sous les Conditions de Lipchitz locales.....	37
2.2.3 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades monotones.....	39
2.2.4 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Linéaires.....	39
2.2.5 Relation entre EDSR et EDP .Généralisation de la formule Fynman- Kac aux EDSR.....	40
2.2.7 Equations stochastiques rétrogrades discrètes.....	41
2.2.8 Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies.....	43
2.2.9 Existence et unicité de la solution.....	45

Chapitre 3 : Simulation et discrétisation des processus stochastiques

3.1 Méthodes de Monte Carlo.....	46
3.1.1 principe de la méthode de M.Carlo.....	46
3.1.2 Fonction d'importance.....	48
3.1.3 Simulation de processus.....	48
3.1.4 Simulation récursive.....	48
3.1.5 Simulation rétrograde.....	49
3.1.6 Simulation du mouvement Brownien.....	49
3.2 Discrétisation d'équations différentielles stochastiques.....	50
3.2.1 Schéma de discrétisation d'Euler (la méthode d'Euler Maruyama).....	50
3.2.2 Convergence L^p	51
3.2.3 Convergence faible.....	51
3.2.4 Exemples.....	52
3.2.5 Schéma de Milshtein.....	53
3.2.6 Théorème du point fixe	55
3.3 Discrétisation et la résolution numérique des équations différentielles Stochastiques rétrogrades.....	56
3.3.1 Discrétisation des EDSR dans le cas où le driver ne dépend que de t et Y_t	57
3.3.2 Convergence du schéma de discrétisation.....	60

3.3.3 discrétisation des EDSR dans le cas où le driver dépend de t , Y_t et Z_t	60
3.3.4 Convergence des schémas de discrétisation.....	62
3.3.5 Quelques exemples de simulation.....	63
3.3.6 Résultats numériques.....	74
3.4 Discrétisation et résolution numérique des équations différentielles Stochastiques rétrogrades réfléchies non markoviennes avec une seule barrière inférieure continue.....	76
3.4.1 Schéma réfléchi implicite	77
3.4.2 Schéma réfléchi explicite.....	77
3.4.3 Schémas de pénalisation numérique.....	77
3.4.4 Convergence des schémas de discrétisation.....	79
3.4.5 Exemple de simulation.....	80

Chapitre 4 : Discrétisations des équations différentielles stochastiques Rétrogrades markoviennes.

4.1 Discrétisation dans le cas où le driver ne dépend pas de Z	88
4.2 Majoration d'erreurs et convergence du schéma.....	91
4.3 Généralisation au cas où le driver dépend de Z	91

Chapitre 5 : Applications des EDSR dans le domaine des finances

5.1 Options financières.....	95
5.1.1 L'option européenne.....	96
5.1.2 Formule de Black et Scholes.....	97
5.2 L'approche EDSR.....	98
5.2.1 Exemples d'application des EDSR pour l'évaluation d'un call et d'un put européens.....	99
5.3 Option américaine.....	105
5.3.1 L'approche edsr réfléchies	106
Conclusion.....	115
Annexe.....	116
Résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies.....	116
Références.....	120

Abstract

In this work, that I shared in five chapters, and that has essential goal to expose some methods, examples and applications on the numeric resolution of some types of backward stochastic differential equations

In the first chapter, I gave some basics recalls concerning the stochastic calculation and processes of diffusion.

In the second chapter, I exposed, in summary, the important points in the topic of stochastic differential equations, the backward stochastic differential equations, and the reflected stochastic differential equations with one barrier and theorems of existence and uniqueness of solutions concerning these equations.

The third chapter is dedicated to discretisation methods of BSDE and reflected BSDE with only one continuous lower barrier. In the non Markovian case and I gave a description of some methods of BSDE approximation where the random walk method has been taken like example. After the theoretical part, one place of this chapter is reserved to some examples of simulation, in the particular cases, according to schemes of discretisation proposed.

In the fourth chapter, I tried to expose, in summary, some works made on the approximation of BSDE in Markovian case.

I exposed in the fifth and last chapter, some applications of BSDE in the financial domain such the assessment of the European option price and the determination of the option price and the exit times in the case of the American options.

Résumé

A travers ce modeste travail nous avons essayé d'exposer quelques méthodes, exemples et applications sur la résolution numérique des équations différentielles stochastiques rétrogrades,

Dans le premier chapitre, on a donné quelques rappels de base concernant le calcul stochastique et les processus de diffusion Dans le second chapitre on a exposé en résumé, les grandes lignes concernant les équations différentielles stochastiques, les équations différentielles stochastiques rétrogrades et rétrogrades réfléchies avec une seule barrière et les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions concernant ces équations.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de discrétisation des EDS en général et des EDSR en particulier avec une description de quelques méthodes d'approximation d'EDSR et des EDSR réfléchies avec une seule barrière inférieure continue .

Dans ce chapitre on a donné les schémas de discrétisation avec les théorèmes de convergence associés, pour un cas particulier d'EDSR dit non markovien ,pour la discrétisation nous avons utilisé une méthode appelée la méthode des marches aléatoires.

Après l'étude théorique on a réservé une place dans ce chapitre à quelques exemples de simulation.

Dans le quatrième chapitre on a donné un petit résumé sur quelques travaux faits sur l'approximation d'EDSR dans le cas markovien.

Dans le cinquième et dernier chapitre, on trouve quelques applications des EDSR dans le domaine des finances tels l'évaluation du prix d'options européennes et la détermination du prix d'options et les temps d'arrêt dans le cas des options américaines.

ملخص

إن الهدف الأساسي لهذه المذكرة والمقسمة إلى خمسة فصول , هو عرض بعض الطرق الخاصة بالحل العددي لأصناف من المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية.

في الفصل الأول قمنا بالتذكير ببعض التعريفات والنظريات الهامة المتعلقة بالحساب الستوكاستكي وسير النشر

في الفصل الثاني تم التطرق بإيجاز للمواضيع المتعلقة بالمعادلات التفاضلية الستوكاستكية , المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية و المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية المنعكسة ذوات الحاجز الواحد المستمر السفلي مع ذكر نظريات وجود ووحدانية الحلول الخاصة بها .

خصص الفصل الثالث للتعريف ببعض الطرق الخاصة بتبسيط أو تقطيع المعادلات التفاضلية الستوكاستكية والمعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية و التراجعية المنعكسة حيث اعتمدنا طريقة المشي العشوائي كمثال كما نجد العرض النظري لهذه الطريقة و الخاص بالنوع الغيرماركوفي من هذه المعادلات و المحتوي على مناهج التبسيط أوالتقطيع و نظريات تقاربها كما خصصنا جانبا من هذا الفصل لبعض أمثلة محاكاة حالات خاصة من هذه المعادلات حسب هذه المناهج.

في الفصل الرابع نجد ملخص عن بعض الأعمال المنجزة في موضوع المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية الماركوفية.

في الفصل الخامس والأخير أدرجت بعض الأمثلة عن تطبيق المعادلات التفاضلية الستوكاستكية التراجعية في الميدان المالي كتحليل الثمن في حالة الاختيار الأوروبي وتقييم الثمن وأزمة التوقف في حالة الاختيار الأمريكي.