

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université  
M'hamed BOUGARA  
Boumerdès



Faculté  
des Sciences  
Boumerdès

**DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**MEMOIRE DE MAGISTER**  
**SPECIALITE : MATHÉMATIQUES**  
**OPTION : MODELES STOCHASTIQUES**

**Thème**

**Estimation des Paramètres des EDS :**  
**Modèle de Black et Scholes**

**Présenté par**

**Mme MEDDAHI Samia**

**Soutenu publiquement le :**

**Devant le jury composé de :**

|                      |                            |                   |          |                         |
|----------------------|----------------------------|-------------------|----------|-------------------------|
| <b>Présidente</b>    | <b>Mme Megdouda OURBIH</b> | <b>M. C</b>       | <b>A</b> | <b>U.A. Mira Bejaia</b> |
| <b>Promoteur</b>     | <b>Mr Khaled KHALDI</b>    | <b>M. C</b>       | <b>A</b> | <b>UMBB Boumerdes</b>   |
| <b>Co. Promoteur</b> | <b>Mr Hamid OSMANOV</b>    | <b>Professeur</b> |          | <b>UMBB Boumerdes</b>   |
| <b>Examineur</b>     | <b>Mr Assim ABASSOV</b>    | <b>M. C</b>       | <b>A</b> | <b>UMBB Boumerdes</b>   |
| <b>Examineur</b>     | <b>Mr Said MAKDECHE</b>    | <b>M. C</b>       | <b>B</b> | <b>UMBB Boumerdes</b>   |

**Année universitaire 2009**

## Résumé

L'évolution des actifs financiers est essentiellement décrite par des processus continus, et plus particulièrement par des processus de diffusion log-normale. Ce mémoire développe les méthodes d'estimation des paramètres du modèle Black et Scholes ainsi que l'adaptation en finance.

Nous présentons la théorie des probabilités et on introduit la notion d'estimation (chapitre 1), la théorie des processus stochastiques (chapitre 2) et la théorie générale d'évaluation d'options pour l'alternative stochastique (chapitre 3). Le quatrième chapitre porte respectivement sur l'estimation des paramètres du modèle Black et Scholes par deux méthodes ; la méthode discrète utilisant la fonction densité de transition du processus de diffusion, la seconde se base sur la fonction de densité du temps de première passage du processus à travers une borne constante et nous illustrons ensuite nos résultats par des applications numériques sur le cours de l'action Toyota MTR (chapitre 5).

## Abstract

The evolution of financial assets is essentially described by continuous processes, and more particularly by processes of diffusion log-normal, this memory develops the methods of estimation of the parameters of model Black and Scholes as well as the adaptation in finance.

We present the theory of probability and one introduces the notion of estimation (chapter 1), the theory of stochastic processes (chapter 2) and the general theory of evaluation of options for the stochastic alternative (chapter 3). Fourth chapter concerns respectively on the estimation of the parameters of the model Black and Scholes by two methods; methods discreet using function density of transition of the process of diffusion, second bases itself on the function of density of the first passage time of the process through a constant border and we illustrate then our results by numeric applications on the course of action Toyota MTR (chapter 5).

## ملخص

تطور الأصول المالية يمكن وصفها أساسيا بالسيرورات المستمرة و خاصة عملية انتشار لوغاريتم عادي . هذه المذكرة تعالج طرق تقدير البرامترات ( العوامل ) لنموذج بلاك سكولس و كذلك التطبيق في مجال المالية.

نعرض الجانب النظري للاحتمالات والتقديرات ( الفصل الأول ) ،المجال النظري للسيرورات الستوكاستيكية (الفصل الثاني) ، النظرية العامة لتقييم الخيارات (الفصل الثالث).

في الفصل الرابع نعرض تقدير البرامترات (العوامل) لنموذج بلاك سكولس بطريقتين مختلفتين: "الطريقة المتقطعة" التي تستعمل دالة كثافة تنقل لعملية الانتشار ، الطريقة الثانية تتركز على دالة كثافة وقت المرور الأول للسيرورة لاجتياز ذروة ثابتة ، و نستدل بعد ذلك نتائجنا بتطبيقات رقمية على سعر أسهم تويوتا (الفصل الخامس) .

# Sommaire

Introduction générale ..... Erreur ! Signet non défini.

## Chapitre 1 : Théorie de Probabilité et Application en Statistique

- 1.1 Introduction ..... Erreur ! Signet non défini.
- 1.2 Rappels de probabilité ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.1 Espace de probabilité ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.2 Variable aléatoire ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.3 Loi d'une variable aléatoire ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.4 Espérance Mathématique de variable aléatoire: ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.5 Indépendance ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.6 Espérance conditionnelle ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.7 Convergences de suites de variables aléatoires: ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.8 Processus aléatoire à temps discret ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.2.9 Martingale ..... Erreur ! Signet non défini.
- 1.3 Estimation ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.3.1 Estimation ponctuelle ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.3.2 Estimation ponctuelle des paramètres usuels ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.3.3 Estimation du maximum de vraisemblance ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 1.3.4 Estimation par intervalle de confiance ..... Erreur ! Signet non défini.

## Chapitre 2 : Calcul Stochastique et Modèle de Black et Scholes

- 2.1 Introduction ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.2 Processus aléatoire à temps continu ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.3 Vecteurs gaussiens ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.4 Mouvement brownien ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.5 Variation quadratique ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.6 Intégrale de Itô ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.7 Calcul d' Itô ..... Erreur ! Signet non défini.
- 2.8 Équations différentielles stochastiques ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 2.8.1 Propriété de Markov ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 2.8.2 Équations non homogènes vectorielles: ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 2.8.3 Equations linéaires ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 2.8.4 Modèle de Black et Scholes ..... Erreur ! Signet non défini.

## Chapitre 3 : Modèles Stochastiques des Marchés Financiers

- 3.1 Introduction ..... Erreur ! Signet non défini.
- 3.2 Le problème des produits dérivés en finance ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.2.1 Les contrats à terme ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.2.2 Les options ..... Erreur ! Signet non défini.
- 3.3 Arbitrage statique ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.3.1 Unicité du prix d'instruments financiers à flux identiques ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.3.2 Prix à terme ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.3.3 Parité call- put ..... Erreur ! Signet non défini.
- 3.4 Modèle stochastique ..... Erreur ! Signet non défini.
- 3.5 Exercices ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.5.1 Opérations sur les options ..... Erreur ! Signet non défini.
  - 3.5.2 Relations d'arbitrage sur le call ..... Erreur ! Signet non défini.

|       |  |                                    |
|-------|--|------------------------------------|
| 3.6   | Modélisation des marchés financiers en temps continu                   | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.6.1 | Modèle en temps continu .....  | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.6.2 | Portefeuille autofinçant .....   | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.7   | Formule et propriétés de Black- Scholes .....                          | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.7.1 | L'équation aux dérivé partielle (EDP) d'évaluation et couverture ..... | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
|       | <b>Signet non défini.</b>  |                                    |
| 3.7.2 | Formule fermée de Black et Scholes .....                               | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.8   | Sensibilité et grecques.....   | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.9   | Les voies d'extension du modèle de Black et Scholes                    | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.9.1 | Modèles à saut.....  | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.9.2 | Volatilité non constante et stochastique.....                          | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 3.9.3 | Volatilité non constante et taux d'intérêt non constants               | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
|       | <b>défini.</b>   |                                    |
| 3.9.4 | Les modèles à volatilité déterministe et non stationnaire:             | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
|       | <b>défini.</b>   |                                    |
| 3.9.5 | Les modèles ARCH et GARCH .....  | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |

#### **Chapitre4 : Estimation des paramètres de modèle Black et Scholes**

|       |   |                                    |
|-------|---|------------------------------------|
| 4.1   | Introduction.....                                     | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 4.2   | Série de rendement.....                               | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 4.2.1 | Propriétés statistiques des séries de rendement ..... | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 4.2.2 | Tests statistiques des séries de rendement .....      | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 4.3   | Estimation historique .....                           | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 4.4   | Méthode discrète .....                                | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 4.5.  | Méthode via le temps du premier passage .....         | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |

#### **Chapitre5 : Application en Finance**

|       |   |                                    |
|-------|---|------------------------------------|
| 5.1   | Introduction.....                                       | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.2   | Statistiques descriptives .....                         | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.3   | Estimation des paramètres de modèles Black Scholes      | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.3.1 | Méthode discrète .....                                  | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.3.2 | Méthode via le temps du premier passage .....           | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.4.  | Analyse générale des résultats .....                    | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.4.1 | Comparaison entres les deux méthodes d'estimation ..... | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
|       | <b>défini.</b>  |                                    |
| 5.4.2 | Simulation .....  | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.4.3 | Prévision .....   | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.5.  | Discrétisation des EDS (Black Scholes).....             | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.5.1 | Schéma Euler .....                                      | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |
| 5.5.2 | Schéma de Milstein.....                                 | <b>Erreur ! Signet non défini.</b> |

**Conclusion générale** ..... **Erreur ! Signet non défini.**

**Bibliographie**