

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université
M'hamed BOUGARA
Boumerdès



Faculté
des Sciences
Boumerdès

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER
SPECIALITE : MATHÉMATIQUES
OPTION : MODELES STOCHASTIQUES

Thème

**PROCESSUS STOCHASTIQUES ET EQUATIONS AUX
DERIVEES PARTIELLES**

Présenté par

HANECH MOHAMED

Soutenu publiquement le :29/06/2009

Devant le jury composé de:

Présidente :	Mme H. GUERBYENNE	Maitre de conférences A	USTHB Alger
Promoteur :	Mr K. KHALDI	Maitre de conférences A	UMBB Boumerdès
Co-promoteur :	Mr A. ABASSOV	Maitre de conférences A	UMBB Boumerdès
Examineur:	Mr H. OSMANOV	Professeur	UMBB Boumerdès
Examineur:	Mr S.MAKDECHE	Maître de conférences B	UMBB Boumerdès

Année universitaire 2008 - 2009

Abstract

The aim of this work is to show the relation between the partial differential equations of the second order and the stochastic processes of diffusion, and present some results obtained recently on the partial derivative equations by probabilistic methods.

These results provide a probabilistic method that we allow to avoid the complication of numerical methods and written the solution as expectation of functional of diffusion process. This work is presented in five chapters:

The **chapter I**, present the basic mathematics tools, the Brownian motion and the stochastic process solution of stochastic differential equation (SDE) well-known with noun of diffusion process i.e. that their future is not depending of any other state excepting the present state, is key notion of this study. We introduce a new character of integral, is the stochastic integral says Itô integral that allow to give a sense to the differential of Brownian motion, the important notion upon rest the SDE theories.

In the chapter **II**, we give the generality of partial differential equations (PDE) of second order and explain the method of finite difference method this method is used in case where the resolution by the analytic method is impossible.

In the chapter **III**, we exhibit the profound relation existed between the notion of partial differential equations and stochastic differential equations through the certain theory (Feynman-Kac), the generalization of this theory given a probabilistic interpretation of PDEs.

The chapter **IV** is an application which we help to comprehend the notions of the president chapter, we start by simulating the trajectory of Brownian motion, and next, we simulate the diffusion process and resolve a PDE by the probabilistic method.

The chapter **V**, it is an application in finance, where we applied the Black and Scholes formula by different methods.

ملخص

نهدف من خلال هذا العمل إلى إظهار العلاقة الموجودة بين معادلات المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية والعمليات العشوائية للنشر. بالإضافة إلى التطرق إلى بعض النتائج المتعلقة بمعادلات المشتقات الجزئية و حلها بطرق احتمالية.

هذه النتائج تمكننا من تجنب استعمال الطرق الرقمية للحل وتجنب مشاكلها، ينقسم هذا العمل إلى خمسة فصول : نتطرق من خلال الفصل الأول إلى إبراز الأساسيات الرياضية التي نحتاجها في هذه الدراسة , و من بينها حركة البرونيان و السير العشوائي الذي هو حل للمعادلة التفاضلية العشوائية, والذي يسمى أيضا العمليات العشوائية للنشر. كما نتطرق إلى تكامل ايتو الذي يمكننا من إعطاء معنى للتفاضل بالنسبة إلى حركة البرونيان.

نتطرق من خلال الفصل الثاني إلى عموميات حول معادلات المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية, ثم نشرح إحدى الطرق الرقمية لحل هذه المعادلات و هي طريقة الفروق المنتهية, والتي تعطينا حل تقريبي لهذه المعادلات. في الفصل الثالث نبين العلاقة العميقة الموجودة بين معادلات المشتقات الجزئية والمعادلات التفاضلية العشوائية من خلال نظريات وبصفة خاصة تلك التي تحمل اسم فايمن كاييس, تعميم هذه النظرية يمكننا من إعطاء ترجمة احتمالية لمعادلات المشتقات الجزئية وبالتالي حل تقريبي.

الفصل الرابع هو عبارة عن تطبيق لما جاء في الفصول السابقة, ونبدؤ هذا التطبيق بتمثيل مسار حركة البرونيان ثم ننقل إلى تمثيل مسار للمعادلة التفاضلية العشوائية وذلك بإتباع طريقة ايلر, ثم ننقل إلى الجزء الأهم لهذا العمل, وهو الترجمة الاحتمالية لمعادلات المشتقات الجزئية, لتسهيل التطبيق نختار معادلة المشتقات الجزئية التي يمكننا حلها بالطرق التحليلية (معادلة قطع مكافئ), ثم نحلها بطريقة الفروق المنتهية ونقارن النتائج المتحصل عليها من خلال الطرق المستعملة.

الفصل الخامس و الأخير هو تطبيق في النظام المالي وذلك باستعمال النتائج المتحصل عليها في الفصول السابقة, حيث نركز الدراسة على تقييم الخيارات في نموذج بلاك شولز, من خلال تقديم مختلف الطرق التي تمكننا من إيجاد قيمة الخيارات, أي طريقة مونتي كارلو وطريقة بينوميال وفي الأخير طريقة المرور بمعادلة المشتقات الجزئية لبلاك شولز.

Sommaire

INTRODUCTION :	1
-----------------------------	---

CHAPITRE I: Mouvement Brownien et calcul stochastique

0. Introduction :	3
1. Processus aléatoires :	4
2. Processus gaussien :	5
3. Mouvement brownien :	6
3.1. Construction du mouvement brownien :	6
3.2. Régularité des trajectoires du mouvement brownien :	8
3.3. Mouvement brownien standard :	9
3.4. Transformations du mouvement brownien standard :	10
3.5. Semi-groupe du mouvement brownien :	10
3.6. Mouvement brownien multidimensionnel :	13
4. Martingales et temps d'arrêt :	13
4.1 Martingales :	13
4.2. Comportement d'une martingale à l'infini :	14
4.3 Temps d'arrêt :	16
4.4. Tribu du passé d'un temps d'arrêt :	17
5. Intégrales stochastiques :	19
5.1. Variation quadratique :	19
5.2. Intégrales stochastiques :	21
5.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique :	23
5.2.2. Extension de l'intégrale stochastique :	24
5.3. Formule d'Itô :	25
6. Equations différentielles stochastiques :	28
6.1. Introduction :	28
6.2. Solutions d'une équation différentielle stochastique :	29

CHAPITRE II : Généralité sur les EDPs et la méthode des différences finies

0. Introduction :	34
1. Généralité sur les équations aux dérivées partielles :	35
1.1. Définitions :	35
1.2. Conditions initiales et conditions aux limites :	36

1.3. Classification des EDPs du second ordre :	37
1.4. EDPs du second d'ordre à plusieurs variables indépendantes:.....	39
1.5. Besoins en termes de conditions initiales et aux limites :	39
2. Méthode des différences finies pour les EDPs paraboliques :	40
2.1. Problèmes du premier ordre en temps : équation de la chaleur :.....	41
2.2.1. Schémas numériques de discrétisation par différences finies :.....	42
2.2.2. Erreur de troncature, consistance et ordre d'un schéma :	45
2.2.3. Stabilité des schémas numériques :	46
2.2.4. Convergence des schémas :	50

CHAPITRE III : Interprétation probabiliste des EDPs

0. Introduction :	52
1. Générateur infinitésimal :	53
2. Interprétation probabiliste des EDP:.....	54
2.1 Equation de la chaleur :.....	54
2.2. Formule de Feynman-Kac multidimensionnelle:.....	56
2.3.Problème de Cauchy pour des opérateurs généraux :.....	57
2.4. Interprétation des EDP de type elliptique :.....	58
a)Problème elliptique sans frontière :.....	59
b) Problème elliptique avec condition de Dirichlet :.....	59
2.5. Interprétation des EDP de type parabolique :.....	60
a. Problème parabolique sans frontière :.....	61
b. Problème parabolique avec condition de Dirichlet :.....	62
3. Discrétisation de problèmes :.....	63
3.1. Le schéma d'Euler :.....	63
3.2. La méthode de Monte Carlo :.....	63

CHAPITRE IV : Application

0. Introduction :	67
1. Discrétisation du mouvement brownien :.....	68
2. Discrétisation d'un processus de diffusion:.....	71
2.1. Schéma d'Euler- Maruyama :	71

2.2. Exemple de discrétisation d'un processus de diffusion:	72
3. Application à l'interprétation probabiliste des EDPs :	75
3.1. Problème N°=1 :	75
3.1.1. Illustration numérique du problème par la méthode déterministe(La méthode des différences finies) :	76
3.1.2. Illustration numérique du problème par la méthode probabiliste :	80
3.2. Problème N° 2 :	84
3.2.1. Illustration numérique du problème par la méthode des différences finies :	85
3.2.2. Illustration numérique du problème par la méthode probabiliste :	88

CHAPITRE V : Application en finance

0. Introduction :	91
1. Modèle du prix de l'actif:	91
2. Formule de Black et Scholes :	93
a. La méthode de Monte Carlo :	95
b. La méthode Binomiale :	96
c. EDP de Black et Scholes :	98
i. Méthode des différences finies pour l'EDP de Black et Scholes :	99
ii. Méthode probabiliste pour l'EDP de Black et Scholes :	100
CONCLUSION :	103
ANNEXE	104
BIBLIOGRAPHIE	111