

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA**  
**FACULTÉ DES SCIENCES**  
**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**  
**LABORATOIRE DES TECHNIQUES MATHÉMATIQUES LTM**

# **THÈSE**

PRÉSENTÉE EN VUE D'OBTENIR LE DIPLÔME DE

**DOCTORAT EN SCIENCES**

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

PAR

ZERGUINE MOHAMED

**THÈME**

**HOMOGENÉISATION D'UNE CLASSE DE  
FONCTIONNELLES INTÉGRALES ET EXISTENCE ET  
UNICITÉ DES SOLUTIONS DE QUELQUES ÉQUATIONS  
D'ÉVOLUTION INCOMPRESSIBLES**

SOUTENUE LE:

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE:

<b>S. REBIAI:</b>	PR	UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA	<b>PRÉSIDENT</b>
<b>A. YOUKANA:</b>	M.C	UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA	<b>RAPPORTEUR</b>
<b>A. AIBECHÉ:</b>	PR	UNIVERSITÉ FERHAT ABBESS SÉTIF	<b>EXAMINATEUR</b>
<b>M. DENCHÉ:</b>	PR	UNIVERSITÉ MENTOURI CONSTANTINE	<b>EXAMINATEUR</b>
<b>A-D. CHACHA:</b>	M.C	UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA	<b>EXAMINATEUR</b>
<b>A-Z. MOKRANE:</b>	M.C	UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA	<b>EXAMINATEUR</b>

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010/2011**

## Contents

<b>Chapter 1. General Introduction</b>	<b>5</b>
1. Nonconvex Random Higher Order Integrals and Homogenization	5
2. Inviscid Limit For Axisymmetric Navier-Stokes System	8
3. On the Global well-posedness of the Euler-Boussinesq system with fractional dissipation	14
Bibliography	19
<b>Chapter 2. Nonconvex Random Higher Order Integrals and Homogenization</b>	<b>23</b>
1. Introduction	23
2. Probabilistic Description of Non-Homogeneous Media	25
3. A general Homogenization Theorem	28
4. Proof of the main result	35
Bibliography	47
<b>Chapter 3. Inviscid limit For Axisymmetric Navier-Stokes System</b>	<b>49</b>
1. Introduction	49
2. Preliminaries	52
3. Study of a vorticity like equation	57
4. Proof of Theorem 1.1	61
5. The Rate Convergence	71
6. Appendix	74
7. Perspectives	74
Bibliography	77
<b>Chapter 4. On the Global well-posedness of the Euler-Boussinesq system with fractional dissipation</b>	<b>79</b>
1. Introduction	79
2. Preliminaries	82
3. Study of a transport-diffusion equation	85

---

4. Proof of Theorem 4.1	93
5. Perspectives	101
Bibliography	103
<b>Chapter 5. Littlewood-Paley theory and Besov Spaces</b>	<b>105</b>
1. Localization in Frequency Space	105
2. Inhomogeneous Besov Spaces	110
3. Paradifferential Calculus	115
Bibliography	121

2010-2011

UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
LABORATOIRE DES TECHNIQUES MATHÉMATIQUES LTM

ZERGUINE MOHAMED

RÉSUMÉ. La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude du comportement asymptotique d'une fonctionnelle intégrale stochastique nonconvexe dépendant du second gradient dont l'intégrande est coercive, bornée, lipschitzienne et vérifiant une condition de périodicité en loi. Pour identifier la  $\Gamma$ -limite, nous combinons le théorème ergodique des processus discret sous-additif avec les techniques de la  $\Gamma$ -convergence nous démontrons le problème en question. La deuxième partie est composée de deux chapitres: primo, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale du système de Navier-Stokes lorsque les données initiales sont axisymétriques et dans des espaces de Besov critiques. Ensuite, nous étudions la limite non-visqueuse du système de Navier-Stokes vers le système d'Euler, dont nous estimons le taux de convergence. Secondo, nous établissons l'existence et l'unicité du système d'Euler-Boussinesq avec une dissipation fractionnaire dans les espaces de Besov. La démonstration utilise essentiellement un résultat lié au terme commutateur venant de la commutation entre le laplacien fractionnaire et le flot régularisé, puis l'effet régularisant de l'équation transport-diffusion régissant l'évolution de la température.

ABSTRACT. The first part of this thesis is devoted to study the asymptotic behavior of nonconvex random integral functionals depending on second gradient whose integrand is coercive, bounded, lipschitzian and periodic in law. In order to identify the  $\Gamma$ -limit, we combine the ergodic theorem for discrete subadditive processes with  $\Gamma$ -convergence techniques we prove the problem in question. The second part is composed of two parts. Firstly, we are interested to study the global well-posedness of incompressible Navier-Stokes equations with initial data is an axisymmetric vector fields and lying to critical Besov spaces. Afterward, we establish the inviscid limit of the Navier-Stokes equations toward Euler equations and we evaluate the rate of convergence. Secondly we treat the global well-posedness of Euler-Boussinesq system with fractional dissipation and initial data lying in critical Besov spaces. The proof of this result is linked to the commutator term coming from the commutation between the fractional laplacian and the regularized flows, afterward the smoothing effects of the transport-diffusion equation governing the evolution of the temperature.