

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université M'hamed BOUGARA - BOUMERDES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER
OPTION : MODELES STOCHASTIQUES

THEME

***MODELISATION STOCHASTIQUE EN FINANCE:
MODELES DE TAUX ET EVALUATION
D'ACTIFS***

Présenté par

M^{lle} AIT-HOCINE FADILA

Soutenu publiquement le :

Devant le jury composé de :

Président	M. Ibazizen	M.C	UMM – Tizi-Ouzou
Rapporteur	N. Abassov	M.C	UMBB - Boumerdès
Examineur	K. Osmanov	Professeur	UMBB - Boumerdès
Examineur	K. Khaldi	M. C.	UMBB - Boumerdès

SOMMAIRE

RESUME.....	7-8
INTRODUCTION GENERALE.....	9
CHAPITRE I : LES MARCHES FINANCIERS	
<hr/>	
INTRODUCTION.....	12
I- MARCHE FINANCIER.....	13
1-DEFINITION.....	13
2-VOCABULAIRE.....	13
II- FONCTIONS DES MARCHES FINANCIERS	13
1- MARCHE PRIMAIRE.....	13
2- MARCHE SECONDAIRE.....	13
III- MARCHE BOURSIER.....	14
1- LES SOCIETES DE BOURSE.....	15
2- LE MARCHE DES OBLIGATIONS.....	15
3- LE MARCHE DES ACTIONS	15
IV- LES INSTRUMENTS FINANCIERS	16
1- DEFINITION.....	16
2- TYPOLOGIE	16
2-1 ACTIFS DE BASE.....	17
2-2 ACTIFS DERIVES.....	19
A-PRESENTATION DES PRODUITS DERIVES.....	19
B-LES MARCHES DES PRODUITS DERIVES.....	21
V-VOLATILITE, RENDEMENT ET RISQUE.....	22
1- VOLATILITE.....	22
2- RENDEMENT.....	22
3- RISQUE.....	23
CONCLUSION.....	24
CHAPITRE II : INTRODUCTION AUX CALCULS STOCHASTIQUES	
<hr/>	
INTRODUCTION.....	25
II- CARACTERISTIQUES GENERALES.....	26
II-1 FILTRATIONS, PROCESSUS ADAPTES ET PROCESSUS PREVISIBLES.....	27
II-2 PROCESSUS DE DIFFUSION.....	27
II-2-1 PROCESSUS DE MARCOV.....	28
II-2-2 PROCESSUS DE DIFFUSION ET PROCESSUS D'ITO.....	28
II-3 FORMULE DE ITO.....	29
II-3-1 LEMME DE ITO.....	29
III- ESPERANCE CONDITIONNELLE.....	29
1- DEFINITION.....	29
2- PROPRIETES DE L'ESPERANCE CONDITIONNELLE.....	30
III-1 MARTINGALES.....	30
III-1-1 CAS DISCRET.....	30
III-1-2 CAS CONTINU	30

PROPRIETES.....	31
III-2 MARTINGALES LOCALES.....	31
IV- MOUVEMENT BROWNIEN.....	31
1-DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES.....	31
2- PROCESSUS DE WEINER GENERAL.....	32
2-1 PROPRIETES DES TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN.....	32
2-2 TEMPS D'ARRET.....	33
3- LE BROWNIEN GEOMETRIQUE.....	33
4- PROCESSUS D'ORNSTEIN UHLENBECK.....	33
V- INTEGRAL STOCHASTIQUE.....	33
1- DEFINITION.....	33
1-1 CAS DE PROCESSUS ETAGES.....	34
1-2 CAS GENERAL.....	34
2- PROPRIETES.....	35
3- THEOREME DE GIRSANOV.....	36
4- TRANSFORME DE LAPLACE.....	36
VI- PROBABILITE HISTORIQUE ET PROBABILITE RISQUE NEUTRE.....	37
1- PROBABILITE HISTORIQUE.....	37
2- PROBABILITE RISQUE NEUTRE.....	37
VII- EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES.....	38
1- DEFINITION.....	38
2-THEOREME D'EXISTENCE.....	38
VIII- EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.....	39
1- PROBLEME PARABOLIQUE.....	39
2- THEOREME.....	39
3-GENERALISATION.....	40
CONCLUSION.....	41

CHAPITRE III : MODELES DE TAUX ET DE DEFORMATION

DE LA COURBE DES TAUX

INTRODUCTION.....	42
III-1 INTERET ET TAUX D'INTERET.....	43
III-2 LA FORMATION DES TAUX D'INTERET.....	43
1- IMPORTANCE DE LA BANQUE CENTRALE.....	43
2- FORMATION DES TAUX LONGS.....	43
3- FORMATION DES TAUX COURTS.....	44
4- TAUX DE BASE BANCAIRE.....	44
5- PRINCIPAUX TAUX FIXES ET TAUX VARIABLES.....	45
III-3 MODELISATION STOCHASTIQUE.....	45
1- MODELE A TEMPS DISCRET.....	46
2- MODELE A TEMPS CONTINU.....	46
III-4 ABSENCE D'ARBITRAGE ET MODELISATION DES TAUX.....	48
1- MODELES DETERMINISTES.....	48
2- MODELES ALEATOIRES.....	48

III-5 MODELES D'EQUILIBRE AVEC UN FACTEUR.....	49
III-6 MODELISATION DES TAUX D'INTERET.....	50
1- DYNAMIQUE DES TAUX EN TEMPS CONTINU.....	50
2- DYNAMIQUE DES TAUX EN TEMPS DISCRET.....	59
III-7 MODELE DE DEFORMATION DE LA COURBE DES TAUX.....	62
1- MODELE EN ABSENCE D'OPPORTUNITE D'ARBITRAGE.....	62
2- EQUATION STRUCTURELLE DES TAUX.....	63
CONCLUSION.....	64

CHAPITRE IV : EVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS

INTRDUCTION.....	65
A- EVALUATION A TEMPS DISCRET.....	66
IV- VALORISATION DES ACTIFS FINANCIERS DANS UN UNIVERS DISCRET A UNE PERIODE.....	66
IV-1 PRODUITS DERIVES.....	66
1- CALL ET PUT SUR ACTIF.....	66
2-VALORISATION DANS UN UNIVERS A DEUX DATES ET DEUX ETATS DU MONDE.....	66
2-1 CONTEXTE DE VALORISATION.....	66
2-2 VALORISATION DU CALL.....	67
2-3 PROPRIETES DES COEFFICIENTS PONDERATEURS.....	68
2-4 PROBABILITE RISQUE NEUTRE.....	68
IV-2 LES ACTIFS DE BASE.....	68
1- REPLICATION.....	68
1-1 REPURCHASE AGREEMENT.....	69
B- EVALUATION EN TEMPS CONTINU.....	69
IV- VALORISATION DES ACTIFS DANS LE CAS MONODIMENSIONNEL.....	69
1- CONTEXTE DE VALORISATION.....	69
1-1 PORTEFEUILLE AUTOFINANCANT.....	70
1-2 OPPORTUNITE D'ARBITRAGE.....	71
1-3 PRIX DE REPLICATION.....	71
2- THEOREME.....	71
2-1 VALORISATION DES ACTIFS DE BASE.....	71
2-2 VALORISATION DES ACTIFS DERIVES.....	71
3- DEMONSTRATION.....	71
3-1 VALORISATION DES ACTIFS DE BASE.....	71
3-2 VALORISATION DES ACTIFS DERIVES.....	73
3-3 CONCLUSION.....	75
4- ANALOGIES AVEC LE CAS DISCRET.....	75
5- DIFFERENCES.....	75
6- FORMULE DE BLACK &SCHOLES.....	75
6-1 PRIX DU CALL.....	75
6-2 PRIX DU PUT.....	76
6-3 PRIX FORWARD D'UN ACTIF.....	76
6-4 PRIX BS DU CALL ET DU PUT COMME FONCTION DU PRIX FORWARD DE L'ACTIF.....	77
CONCLUSION.....	78

CHAPITRE V : SIMULATION DES TRAJECTOIRES DE PROCESSUS

CONTINU

INTRODUCTION.....	79
V- DISCRETISATION DE PROCESSUS CONTINU.....	80
1- DISCRETISATION EXACTE.....	80
2- DISCRETISATION APPROXIMATIVE.....	81
2-1 SCHEMA D'EULER	81
2-2 SCHEMA DE MILSTEIN.....	82
VI- ESTIMATION DES PARAMETRES.....	85
1- ESTIMATION PAR INFERENCE INDIRECTE.....	85
2- ESTIMATION AU MAXIMUM DE VRAISENBLANCE.....	85
2-1 ESTIMATEUR.....	85
2-2 VRAISENBLANCE.....	86
2-3 CAS D'UNE LOI CONTINU.....	86
3- LE BIAIS ASSOCIE A LA PROCEDURE D'ESTIMATION.....	87
4- ESTIMATION AD HOC.....	87
5- ILLUSTRATION DANS LE CAS DU MODELE DE VASICEK.....	88
VII- GENERATION DE NOMBRE ALEATOIRES.....	93
1- LES GENERATEURS PSEUDO ALEATOIRES.....	94
2- LES GENERATEURS QUASI ALEATOIRES.....	95
3- GENERATEUR DU TORE MELANGE.....	95
CONCLUSION.....	96
CONCLUSION GENERALE.....	97
BIBLIOGRAPHIE.....	98

Résumé :

Ce mémoire traite de la modélisation stochastique en finance. Il faut peut être, dans un premier point, préciser que la modélisation dont on va parler ; touche particulièrement une partie du bilan de la société à savoir l'actif (taux court instantané, obligation zéro coupon). L'évaluation et la modélisation de cet actif passe par une étape de choix et de modélisation de la structure des taux d'intérêt.

Outre les chapitres introductifs, le troisième et le quatrième chapitre porte respectivement sur la modélisation des taux d'intérêt (dynamique des taux à temps discret et à temps continu) et l'évaluation des actifs financiers, tout en introduisant la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage.

La modélisation des taux d'intérêt par des processus stochastiques continus, nous a poussé à introduire dans le dernier chapitre, quelques guides méthodologiques qui permettront au praticien d'effectuer de manière efficace des simulations de tels processus : la discrétisation des processus, l'estimation des paramètres et la génération de nombres aléatoires.

Abstract

The research paper treats the stochastic modelisation in finance. It must may be, in a first point, precise that the modelisation about which we are going to speak; touch particularly a part of the society's balance sheet to know the asset (short instantaneous rate, the zero coupon bonds). The evaluation and the modelisation of this asset passes by a choice step and modelisation of the interest rate structure.

In addition to the introductive chapters, the third and the fourth ones deal respectively with the modelisation of the interest rates (rates dynamic in a discreet time and a continuous one) and the evaluation of financial assets, by introducing the notion of the arbitrage opportunity absence.

The modelisation of the interest rates by the continuous stochastic processes, push us to introduce in the last chapter some methodological guides which permit the expert to carry out in an efficient manner simulations of such processes. The first guide is the discretisation of these latters, the second is the parameters estimation and the last is the generation of the uncertain numbers.

ملخص:

نعالج من خلال هذه المذكرة نماذج الستوكاستيك في مجال المالية. لذا بإمكاننا كنقطة أولية تحديد أن النموذجية التي سوف نتحدث عنها تمس بالخصوص جزء من ميزانية المؤسسة وهي الأصول (معدل فوري قصير، سندات القسيمة الصفرية). وتتم هذه الأصول في تقييمها ونموذجيتها بمرحلة اختيار و نموذجية هيكله نسب الفوائد.

إضافة إلى الفصول التمهيدية، فإن الفصل الثالث والرابع يتمحوران حول معالجة نموذجية نسب الفوائد (حركية معدلات الفوائد ذات الأزمنة المتقطعة والمستمرة) وتقييم الأصول على التوالي، آخذين بعين الاعتبار مفهوم غياب فرصة التحكيم.

إن نموذجية نسب الفوائد عن طريق سيرورة الستوكاستيك المستمر، دفعنا في الفصل الأخير إلى إدماج بعض الدلائل المنهجية التي تسمح للممارس إنجاز عمليات محاكاة السيرورات بطريقة فعالة.