

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université M'hamed BOUGARA - BOUMERDES
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER
SPECIALITE: MATHÉMATIQUES
OPTION : MODELES STOCHASTIQUES

Thème

PROCESSUS DE DIFFUSION ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES
STOCHASTIQUES – ASPECTS THEORIQUE ET NUMERIQUE -
APPLICATIONS

Présenté par

SOUAHLIA Ahmed

Soutenu publiquement le : 14 Novembre 2007

Devant le jury composé de :

Président	Boushaba Mahmoud	Maitre de conférences	U.Mentouri- Constantine
Promoteur	Khaldi Khaled	Maitre de conférences	Umbb-Boumerdes
Co-Promoteur	Abassov Assim	Maitre de conférences	Umbb-Boumerdes
Examineur	Osmanov Hamid	Professeur	Umbb-Boumerdes
Examineur	Makdèche Said	Maitre Assistant	Umbb-Boumerdes

Année Universitaire: 2007 / 2008

ملخص:

الحساب التفاضلي يعطي إطار مفهوم المعادلة التفاضلية العادية، التي تستخدم كنموذج للظواهر المتغيرة خلال الزمن. عندما أردنا إضافة تغيرات عشوائية إلى هذه المعادلات تضايقنا بعدم تفاضل الحركة البرونية. إن تعريف مسألة تفاضلية عشوائية يمر عبر تكامل إيتو، وشكل إيتو هو أساس تقنيات الحساب التفاضلي على الأنظمة العشوائية التي نحملها تحت اسم الحساب العشوائي.

الهدف من هذه الدراسة هو تقديم نظرية إيتو للمعادلات العشوائية على شكل تفاضل أو تكامل، وبرهنة الارتباطات التي قد توجد بين المعادلات التفاضلية العشوائية والمعادلات ذات المشتقات الجزئية.

الأدوات المستعملة من أجل الوصول إلى هذا الهدف هي أساسا الحساب العشوائي والتقنيات الأولية للمعادلات التفاضلية العادية.

نبدأ ببناء تكامل مقارنة بالحركة البرونية من أجل التعريف فيما بعد بمفهوم المعادلة التفاضلية العشوائية. الأنظمة العشوائية المستعملة هي أنظمة تمتلك خاصية ماركوف.

نشير فيما بعد إلى التمثيلات الاحتمالية لحلول عدة مسائل، هذه التمثيلات تعطينا وسيلة تحليل أو حساب التقريبات لحلول هذه المعادلات.

Summary:

The differential calculation gives a setting in the notion of ordinary differential equation, that acts as model for variable phenomena in the time.

When we wanted to add to these equations random disturbances, we have been embarrassed by the non differentiability of the Brownian movement. The definition of a problem differential stochastic passes by the integral of Itô. The formula of Itô is to the basis of the differential calculation techniques on the stochastic processes that we regroup under the stochastic calculation name.

The objective of this work is to present the theory of Itô of the stochastic equations under differential or complete form, and to show the ties that can exist between the stochastic differential equations and the equations to the partial derivatives.

The instruments used to reach this objective are essentially the stochastic calculation and the elementary techniques of the equations differential ordinary determinists.

We starts with constructing an integral in relation to the Brownian movement, for in continuation to define the notion of stochastic differential equation. The used stochastic processes are the processes possessing the property of Markov.

We indicate the probabilistic representations of the solutions of the numerous problems. These representations provide an in instrument of analysis or calculation of approximations of the solutions of these equations.

Sommaire

Introduction

Chapitre 01: Généralités.

1-1- Convergence de variable aléatoire	02
1-1-1- Convergence presque sûre	02
1-1-2- Convergence quadratique	03
1-1-3- Convergence en probabilité	03
1-1-4- Convergence en loi	04
1-2- Espérance conditionnelle	05
1-2-1- Conditionnement sur un évènement	05
1-2-2- Espérance conditionnelle par rapport à une tribu	06
1-2-3- Espérance conditionnelle par rapport une variable	06
1-2-4- Propriété de l'espérance conditionnelle	07
1-2-5- Loi conditionnelle	07
1-3- Processus stochastique	09
1-3-1- Filtration	09
1-3-2- Processus	09
1-4- Martingale et temps d'arrêt	11
1-4-1- Martingale	11
1-4-2- Temps d'arrêt	13
1-5- Mouvement Brownien	14
1-5-1- Définition	14
1-5-2- Théorème	15
1-5-3- Propriétés	15
1-5-4- Intégrale de Wiener	18

Chapitre 02: Intégrale stochastique.

2-1- Processus étagés	22
2-2- Généralisation	23
2-3- Processus d'Itô	28
2-4- Formule d'Itô	31
2-4-1- Première forme	31
2-4-2- Fonction dépendant du temps	33
2-4-3- Formule d'Itô multidimensionnelle	36

Chapitre 03: Equations différentielles stochastiques.

3-1- Définition	39
3-2- Théorème d'existence et d'unicité	40
3-3- Propriété de Markov	41
3-4- Théorème de comparaison	42
3-5- Exemples	42
3-6- Equations différentielles stochastiques linéaires	44
3-6-1- Equations différentielles stochastiques linéaires: Bruit additif	46
3-6-2- Equations différentielles stochastiques linéaires: Bruit multiplicatif	48
3-7- Equations différentielles stochastiques réductibles	52

Chapitre 04: La représentation de la solution d'une équation différentielle stochastique.

4-1- Propriétés	58
4-2- Exemples	64

***Chapitre 05: Interprétation probabiliste des E.D.P.
du second ordre et résolution numérique.***

5-1- Interprétation probabiliste des EDP du second ordre	74
5-1-1- Interprétation des EDP de type elliptique	74
5-1-2- Interprétation des EDP de type parabolique	79
5-2- Interprétation probabiliste des EDP et résolution numérique	84
5-2-1- Théorème d'invariance	85
5-2-2- Convergence d'un schéma d'approximation d'un problème elliptique	87
5-2-3- Convergence d'un schéma d'approximation d'un problème parabolique	89
5-2-4- Méthode de Monte-Carlo appliquée à une équation discrétisée	93
5-2-5- Exemple	98

Conclusion

Bibliographie