

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira - Béjaïa  
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur  
Département de Mathématiques

## Mémoire

**En vue de l'obtention du Diplôme de Magister en Mathématiques Appliquées  
Option : Analyse et Probabilités**

### THÈME

**Quelques résultats récents sur la théorie qualitative  
des systèmes différentiels planaires**

**Présenté par : Grazem Mohamed**

Soutenu le 22 / 11 /2006

**Devant le jury :**

Mr. H. MEKIAS	Professeur	U. Sétif	Président
Mr. A. BENDJEDDOU	Maître de Conférences	U. Sétif	Rapporteur
Mr. A. DAHMANI	Professeur	U. Béjaïa	Examineur
Mr. A. BERBOUCHA	Maître de Conférences	U. Béjaïa	Examineur
Mr. N. AKROUNE	Maître de Conférences	U. Béjaïa	Examineur

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et notions de base</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Quelques notions et définitions . . . . .	5
1.2.1 Points singuliers . . . . .	6
1.2.2 Courbes invariantes . . . . .	7
1.3 Problème d'intégrabilité . . . . .	9
1.3.1 Intégrales premières . . . . .	9
1.3.2 Facteurs intégrants . . . . .	10
1.3.3 Facteurs intégrants inverses . . . . .	10
1.3.4 Facteurs exponentiels . . . . .	12
1.4 Quelques résultats sur l'intégrabilité . . . . .	14
1.5 Solutions périodiques . . . . .	16
1.5.1 Existence de cycles limites . . . . .	17
1.5.2 Stabilité des cycles limites . . . . .	18
<b>2 Équations différentielles homogènes linéaires et intégrabilité</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 ÉDHLs du second ordre et intégrabilité . . . . .	21
2.2.1 Exemple d'application . . . . .	25
2.3 ÉDHLs du première ordre et intégrabilité . . . . .	26

2.3.1	Exemple d'application . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Existence de courbes algébriques invariantes</b>	<b>30</b>
3.1	Introduction . . . . .	30
3.2	Conditions sur le cofacteur . . . . .	31
3.2.1	Points critiques à l'infini . . . . .	32
3.2.2	Équations différentielles formelles et solutions formelles . . . . .	37
3.2.3	Valeurs du cofacteur aux points singuliers . . . . .	40
3.3	Exemple d'application (Système de Lotka-Volterra) . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Stabilité des cycles limites</b>	<b>50</b>
4.1	Introduction . . . . .	50
4.2	Résultat important . . . . .	51
4.3	Application . . . . .	51
4.3.1	Exemple d'application ( <i>Système de Van Der Pol</i> ) . . . . .	55
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliographique</b>	<b>58</b>

## Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude qualitative des classes des systèmes différentiels planaires.

On introduit dans la première partie des notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires, et dans la deuxième on étudie le problème d'intégrabilité (la détermination de l'expression explicite d'une intégrale première) puis on montre sous certaines conditions l'existence des courbes algébriques invariantes et en fin, on considère le problème de stabilité des cycles limites.

### Mots clés:

Système différentiel polynomial planaire, intégrale première, courbe algébrique invariante, solutions périodiques, cycles limites, équations de Liénard.