

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE  
présenté par

Saliha BOUGHERARA

pour l'Obtention du Grade de **Magister en Mathématiques**  
Option: Analyse et Modèles aléatoires

PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES PROBLEMES DE CONTROLE  
STOCHASTIQUE:  
APPROCHE PAR LES PROBABILITES EQUIVALENTES

Soutenu le :17/05/2005

devant le jury composé de :

Abdelhakim <b>NECIR</b>	MC	Univ. Batna	Président
Brahim <b>MEZERDI</b>	Pr	Univ. Biskra	Rapporteur
Khaled <b>MELKEMI</b>	MC	Univ. Biskra	Examineur
Seïd <b>BAHLALI</b>	Dr CC	Univ. Biskra	Examineur

## Résumé

Dans ce mémoire, notre intérêt s'est focalisé sur les problèmes de contrôle stochastiques où la dynamique vérifie une équation différentielle stochastique de type Itô. Au premier chapitre, nous avons introduit les différents problèmes de contrôle stochastique et donné quelques exemples. Au deuxième chapitre, nous avons étudié en détails le principe de Bellmann qui donne lieu à l'équation de Hamilton Bellmann Jacobi. Cette équation ne possède pas en général des solutions régulières. Nous nous sommes donc intéressés à la notion de solutions de viscosité introduite par Grandall et Lions. On montre en particulier que la fonction de valeur est l'unique solution de viscosité de l'équation d' HJB. Au troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux conditions nécessaires d'optimalité de type Pontriagin par des approches de Hausmann et Kushner.

Mots clés. Equation différentiel stochastique, contrôle stochastique, principe du maximum, programmation dynamique.

Processus stochastiques et de Contrôle optimal

AMS Subject Classification. Primary 93E20, 60H30. Secondary, 60G44, 49N10.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Introduction aux problèmes de contrôle stochastique</b>	<b>5</b>
1.1	Propriété de la fonction valeur . . . . .	5
1.1.1	Introduction . . . . .	5
1.1.2	Position du problème . . . . .	6
1.1.3	Principe d'optimalité de la programmation dynamique	7
1.1.4	Continuité et propriété de Lipschitz de la fonction valeur	7
1.1.5	Exemples . . . . .	15
1.2	Programmation dynamique et solutions de viscosité . . . . .	16
1.2.1	Equation d'Hamilton-Jacobi -Bellman . . . . .	17
1.2.2	Application : Problème de Merton en horizon fini . . . . .	28
1.3	Solution de viscosité . . . . .	31
1.3.1	Notion de solutions de viscosité . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Principe du maximum : approche par les probabilités équivalentes</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Théorème de Guirsanov et notion de solution faible . . . . .	35
2.3	Position du problème et hypothèses . . . . .	38
2.4	Principe du maximum . . . . .	42
2.5	Processus adjoint . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Principe du maximum stochastique : Approche par les solutions fortes</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Position du problème et Hypothèses . . . . .	48
3.3	Perturbation et estimation des solutions . . . . .	50
3.4	Principe du maximum . . . . .	57
3.5	Equation adjointe . . . . .	60