

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**Université de Batna
Faculté des sciences
Département de mathématiques**

Thèse de Doctorat d' Etat

Présentée par :

Guedjiba Said

Sur les G_k - inverses d'opérateurs linéaires

Soutenue le : 21-11-2005

Devant le jury :

M. Denche	Professeur à l'univ. De Constantine	Président du jury
R. Benacer	Professeur à l'univ. De Batna	Rapporteur
M. Deghdak	Maître de conférences à l'univ. De Constantine	Examineur
K. Messaoudi	Maître de conférences à l'univ. De Batna	Examineur
B. Teniou	Maître de conférences à l'univ. De Constantine	Examineur

SOMMAIRE

Notations	3
Introduction	4

Chapitre 1

0-Preliminaires	7
1- 1 Définitions et exemples	8
1- 2 Existence de 1^k -inverse, G_k -inverse	12
1- 3 G_k -inverse d'un bloc de Jordan	16
1- 4 Méthode de calcul	19
1- 5 Sur les racines de l'unité	22
1- 6 Equations matricielles	26

Chapitre 2

2-Introduction	29
2- 1 Inversion dans les espaces pré-Hilbertiens	31
2- 2 Forme de A_0 dans des bases singulières.....	32
2- 3 Détermination de A_0 par passage à la limite	35
2- 4 L'inverse de Moore-Penrose	36
2- 5 Discontinuité de l'inverse de Moore-Penrose	38

2- 7 Proprietés approximantes	40
2- 8 Methode de Newton	43

Chapitre 3

3- 1 Proprietés algébriques des inverses généralisés	47
3- 2 Existence de 1^k -inverses , G_k -inverses	52
3- 3 1^k -inverses , G_k -inverses et projections	54
3- 4 Sur la théorie de Nashed-Votruba	58
3- 5 Equations à opérateurs linéaires	59

Chapitre 4

4- 1 Inversion dans les espaces de Banach	63
4- 2 Inverses des Φ -opérateurs	66
4- 3 Sur les racines de l'identité.....	67
4- 4 Approximation dans les espaces de Hilbert	71
4- 5 Cas mixtes	73
4- 6 Décomposition suivant une proj.	74
Conclusion	78
Annexe	79
Bibliographie.....	85

Résumé:

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} ;
 $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, le thème traite la question d'inversion d'un opérateur linéaire, alors l'équation $Ax=y$ possède une solution pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$ si et seulement si A est inversible, ce qui n'est pas toujours possible, on essaye donc de trouver un opérateur B ayant des propriétés aussi proches de celles de l'inverse usuel.

Si B est l'inverse de A , on a donc $AB=I_F$ et $BA=I_E$, et comme les projections sont les opérateurs les plus proches de l'application identique du point de vue propriétés, on peut considérer les équations suivantes $BA=Q$ et $AB=P$ où P et Q sont des projecteurs sur E et F respectivement. On traite dans ce travail P et Q comme racines d'ordre k de projections.

L'opérateur linéaire $B:F \rightarrow E$ est appelé 1^k -inverse de A , si $A(BA)^k = A$, $k \in \mathbb{N}^*$, et si A est aussi 1^k -inverse de B , alors B est appelé G_k -inverse de A .

Ce travail donne les propriétés essentielles de l'inverse généralisé, des applications, parmi lesquelles citons la résolution des équations matricielles, équations à opérateurs linéaires, la résolution de l'équation de la forme $f(x)=0$ par la méthode de Newton, on étudie aussi quelques propriétés approximantes et extrémales des inverses généralisés dans des espaces normés.

Mots clé :

Opérateur linéaire, projection, 1^k -inverse, G_k -inverse, racine de l'identité.