

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Université - Hadj Lakhdar - de Batna

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

**Thèse**

présentée par

**Lemnaouar ZEDAM**

Pour l'obtention du diplôme de

**Doctorat en Sciences**

Spécialité : Mathématiques

Sujet de la thèse

---

**Représentations des algèbres multivalentes de Łukasiewicz**

---

**Soutenue le 06 / 07 / 2005**

**devant le jury composé de :**

Mr, Salah Edine REBIAI	Prof.	Université de Batna	Président
Mr, Lemnaouar NOUI	M.C.	Université de Roi Khaled (A. Saoudite)	Rapporteur
Mr, Abdelaziz AMROUNE	M.C.	Université de M'sila	Examineur
Mr, Abdelmadjid BOUDAUD	M.C.	Université de M'sila	Examineur
Mr, Mouhamed KERADA	M.C.	Université de Jijel	Examineur

# Table des matières

	page
<b>Résumés</b> .....	03
<b>Introduction</b> .....	06
<b>Chapitre 1. Préliminaires</b>	
1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés .....	09
1.2 Les Treillis .....	12
1.3 Les Catégories .....	15
1.4 Algèbres de Moisil-Łukasiewicz .....	16
<b>Chapitre 2. Représentation des <math>M - \mathfrak{L}_\theta</math> algèbres involutives par des algèbres floues ( et par des algèbres floues intuitionnistes) involutives</b>	
2.1 Algèbre floue .....	20
2.2 Algèbre floue intuitionniste .....	26
2.3 Représentation des $M - \mathfrak{L}_\theta$ algèbres involutives .....	30
par des algèbres floues involutive	
2.4 Représentation des $M - \mathfrak{L}_\theta$ algèbres involutives .....	34
par des algèbres floues intuitionnistes involutives	
<b>Chapitre 3. Représentation des algèbres de Moisil-Łukasiewicz <math>\theta</math>-valentes involutives par des espaces de Priestley</b>	
3.1 Représentation des treillis distributifs .....	38
3.2 Représentation des algèbres de Moisil-Łukasiewicz $\theta$ -valentes .....	41
3.3 Représentation des algèbres de Moisil-Łukasiewicz $\theta$ -valentes involutives	44

**Chapitre 4.** Représentation des MV-algèbres par des espaces de Priestley

4.1	Notations et définitions utilisées .....	53
4.2	Représentation des <i>MV</i> -algèbre .....	55
	<b>Conclusion</b> .....	59
	<b>Index</b> .....	60
	<b>Bibliographie</b> .....	63

## ملخص الرسالة باللغة العربية

- 1940 (Gr. C. Moisil)  
 . (Algèbre de Moisil-Łukasiewicz )
- (Algèbre des parties floues)  
 1965 (L. A.Zadeh)  
 (Algèbre des parties floues intuitionnistes )  
 . 1983 (K. A. Attanassov)
- (A. Filipiou)  
 (Priestely) \_\_\_\_\_ -
- \_\_\_\_\_ -  
 -  
 C. ) 1958 (MV-algèbre)  
 . (C. Chang

## Résumé

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la représentation des algèbres qui modélisent les logiques multivalentes de Łukasiewicz comme les  $M - \mathcal{L}_\theta$  algèbres et MV-algèbres.

Dans le premier chapitre, on donne les notions et les définitions qui forment l'environnement de ce travail.

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à la description des structures algébriques associées aux ensembles flous et aux ensembles flous intuitionnistes. Nous avons montré du point de vue algébrique des théorèmes de représentation des  $M - \mathcal{L}_\theta$  algèbres involutives qui modélisent la logique multivalente de Łukasiewicz par des algèbres floues involutives et puis par des algèbres floues intuitionnistes involutives.

Dans le troisième chapitre, nous étendons aux  $M - \mathcal{L}_\theta$  algèbres involutives des résultats de H. A. Priestley [27] et A. Filipoiu [19]. Ces résultats concernent respectivement la représentation par des espaces de Priestley des D-treillis ayant un plus petit élément (0) et un plus grand élément (1), et des  $M - \mathcal{L}_\theta$  algèbres.

Finalement, on a généralisé les résultats obtenus sur les algèbres de Moisil-Łukasiewicz  $\theta$ -valentes aux MV-algèbres. (algèbres de logiques multivalentes).

**2000 Mathematics Subject Classification :** 08A72, 06C15, 06D25, 06D30, 03D35, 03E72, 03F55, 03G5, 03G10, 03G20, 03G25.

**Mots Clés:** D-Treillis ;  $\mathcal{L} - M_\theta$  algèbre ; involutif ; algèbre floue ; ensemble flou intuitionniste ; Condition de continuité ; Morphisme ; théorème de représentation ; Filtre ; dualité de Priestley ; MV-algèbre ; MV-espace.

**Abstract.**

In this thesis we are interested in multivalued logic algebras and their representations. The first chapter of the text is dedicated to introduce the necessary background material .

In a second chapter we are interested to the representation theory of involutive  $\theta$ -valued Moisil-Łukasiewicz algebra by fuzzy algebra and by means of intuitionistic fuzzy algebra. In the third chapter, we extend some results obtained by A. Filipoiu [19] to the representation of involutive  $\theta$ -valued Moisil-Łukasiewicz algebras. The main tool used in the generalization of Filipoiu's results is a fixed point theorem for the dual category of  $\theta$ -valued Moisil-Łukasiewicz algebras and the category of ordered  $\theta$ -valued Moisil-Łukasiewicz spaces. By using a previous result of H.A. Priestley[27], this extension is obtained in a very simple and natural way.

The last chapter is dedicated to describe the Priestley duality of MV-algebras, we define the notion of MV-spaces and use it to show that the dual of the category of MV-algebras is isomorphic to the category of MV-spaces.

**2000 Mathematics Subject Classification** : 08A72, 06C15, 06D25, 06D30, 03D35, 03E72, 03F55, 03G5, 03G10, 03G20, 03G25.

**Key words and phrases** : D-Lattice ;  $\mathfrak{L} - M_\theta$  algebra ; involutive ; fuzzy algebra ; intuitionistic fuzzy sets; continuity Condition; Morphism ; Representation theorem; Filter ; Priestley duality ; MV-algebra ; MV-space.