

THÈSE

PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE MARNE-LA-VALLÉE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

HOUARI MECHKOUR

HOMOGENÉISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DE STRUCTURES PIÉZOÉLECTRIQUES PERFORÉES ET LAMINÉES

Soutenue le 19 Novembre 2004, devant le jury composé de :

ALAIN DAMLAMIAN	Professeur, Université de Paris XII	Président
BERNADETTE MIARA	Professeur, ESIEE-Paris	Directrice de thèse
PATRIZIA DONATO	Professeur, Université de Rouen	Rapporteur
ROGER OHAYON	Professeur, CNAM-Paris	Rapporteur
MICHEL BERNADOU	Professeur, Pôle Scientifique Léonard de Vinci	Examineur
OLIVIER POLIT	Professeur, Université de Paris X	Examineur
MICHEL BELLIEUD	Maître de Conférences, Université de Perpignan	Examineur

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction générale	1
I Homogénéisation de l'équation de la piézoélectricité	9
1 Rappels sur le problème tridimensionnel	11
1.1 Description du problème de la piézoélectricité	11
1.1.1 Cadre physique	11
1.1.2 Description de la géométrie et des forces envisagées	12
1.1.3 Formulation du problème	12
1.2 Existence et unicité d'une solution	13
1.2.1 Rappels des inégalités de Poincaré et de Korn	13
1.2.2 Deux formulations variationnelles du problème	14
1.2.3 Théorème d'existence et d'unicité	16
1.3 Le problème de point selle	17
2 Homogénéisation d'un corps piézoélectrique perforé	19
2.1 Géométrie du domaine perforé	20
2.2 Position du problème traité	21
2.3 Le problème variationnel et l'estimation a priori	22
2.3.1 Problème variationnel	23
2.3.2 Rappel sur les inégalités de Poincaré et de Korn dans un domaine perforé	24
2.3.3 Estimation a priori	24
2.4 La convergence à deux échelles	25
2.4.1 Rappel sur la notion de la convergence double échelle	26
2.4.2 Quelques résultats préliminaires de la convergence double échelle	27
2.5 Le résultat principal	29
2.6 Calcul des tenseurs effectifs homogénéisés	33
2.7 Les propriétés du problème homogénéisé	36
2.7.1 Les propriétés du tenseur de rigidité homogénéisé	36
2.7.2 Les propriétés du tenseur de diélectricité homogénéisé	40
2.7.3 Les propriétés du tenseur de piézoélectricité homogénéisé	42
2.7.4 Théorème d'existence et d'unicité du problème homogénéisé	44
2.8 Comportement asymptotique des énergies	45

2.9	Un résultat de correcteur	46
2.10	Conclusion	49
3	Homogénéisation d'une plaque mince piézoélectrique perforée	51
3.1	Géométrie du domaine	52
3.1.1	Géométrie de la surface moyenne	52
3.1.2	Définition de la configuration d'une plaque perforée	52
3.2	Description du problème	53
3.2.1	Problème modèle	54
3.2.2	Problème variationnel	55
3.2.3	Théorème d'existence et d'unicité	55
3.3	Analyse asymptotique d'une plaque piézoélectrique perforée	56
3.3.1	Résultats de convergence	56
3.3.2	Problème local	60
3.3.3	Conclusions et commentaires	60
3.4	Homogénéisation d'une plaque piézoélectrique perforée	61
3.4.1	Problèmes modèles	61
3.4.2	Problèmes variationnels	62
3.4.3	Résultat de convergence pour le problème membranaire	63
3.4.4	Résultat de correcteur pour le problème membranaire	65
3.4.5	Résultat de convergence pour le problème en flexion	65
3.4.6	Résultat de correcteur pour le problème en flexion	74
3.5	Conclusions et commentaires	75
4	Homogénéisation de coques piézoélectriques périodiques de type Koiter	77
4.1	Introduction	77
4.2	Géométrie de la coque étudiée	78
4.2.1	Définition de la coque	78
4.2.2	Géométrie des microstructures	78
4.3	Rappels sur la méthode d'éclatement périodique	78
4.4	Position du problème	82
4.5	Résultat de convergence	83
4.6	Résultat de correcteur	95
4.7	Conclusions et commentaires	96
II	Simulation numérique des structures piézoélectriques	99
5	Homogénéisation numérique des matériaux piézoélectriques perforés	101
5.1	Introduction	101
5.2	Modélisation numérique par la méthode des éléments finis	102
5.2.1	Mise sous forme matricielle du problème variationnel	103
5.2.2	Implémentation de la méthode des éléments finis	105
5.2.3	Présentation des résultats numériques	109
5.3	Implémentation d'une méthode analytique	111
5.3.1	Présentation de la méthode	112
5.3.2	Calcul analytique des tenseurs homogénéisés	117
5.4	Validation de la méthode des éléments finis	117
5.5	Influence de la distribution des perforations sur les propriétés effectives	119

5.6	Influence de la géométrie des perforations sur les propriétés effectives	121
5.7	Influence de la rotation des perforations sur les propriétés effectives	123
5.8	Synthèse et discussion	127
6	Homogénéisation numérique des matériaux piézocomposites laminés	129
6.1	Introduction	129
6.2	Problèmes locaux et tenseurs effectifs	130
6.3	Application hydrostatique	131
6.4	Remarques et commentaires	135
6.5	Description d'un modèle piézocomposite bilaminé perforé	135
6.5.1	Application en hydrophonie (imagerie biomédicale)	136
6.5.2	Application en filtrage spatial	137
6.6	Effet d'ordre des convergences	141
	Conclusions et perspectives	149
	Référence	153

RÉSUMÉ

Homogénéisation et simulation numérique de structures piézoélectriques perforées et laminées

Cette thèse est consacrée à l'étude asymptotique et l'homogénéisation de l'équation de la piézoélectricité, dans le cas de coefficients rapidement oscillants et des structures périodiquement perforées. L'étude consiste à développer deux approches; théorique et numérique. Dans l'approche théorique, on établit le problème homogénéisé et les tenseurs effectifs, ainsi que leurs propriétés pour une structure tridimensionnelle perforée, quand la période tend vers zéro. En se basant sur la même méthodologie, on traite le cas d'une plaque mince et d'une coque de Koiter périodiques, lorsque l'épaisseur et la période tendent vers zéro.

Le deuxième volet comporte la simulation numérique du comportement macroscopique de quelques structures piézoélectriques particulières, en l'occurrence : le piézocomposite perforé et le piézocomposite laminé. Cette simulation trouve un intérêt pour de nouvelles applications dans ce type de structures, notamment l'hydrophonie, l'imagerie biomédicale et le contrôle des vibrations (filtrage spatial).

Mot clés. piézoélectrique, piézocomposite, élasticité, analyse asymptotique, homogénéisation, domaines perforés, convergence à deux échelles, méthode de l'éclatement périodique, coques de Koiter.

ABSTRACT

Homogenization and numerical simulation for perforated and laminated piezoelectric structures

This thesis is dedicated to the study of the piezoelectricity equation, with rapidly oscillating material coefficients and for the periodic perforated structures. In this thesis we have prospected two approaches; the theoretical and the numerical one. In the theoretical approach, we establish the homogenized problem and the effective tensors. We also show the properties of these tensors for a three-dimensional perforated structure as the period tends towards zero. Using the same method, we deal with the case of a perforated thin plate and a periodic Koiter-type shell, when the thickness and the period tend towards zero.

The concern of the second constituent of this thesis is the digital simulation of the macroscopic behavior of some particular piezoelectric structures, in the particular: the perforated piezocomposite and the piezocomposite laminated. The results of these simulations open the door to new perspectives, in particular, biomedical imagery, hydrophonic and the vibrations control (spatial filters) applications.

Key words. piezoelectric, piezocomposite, elasticity, asymptotic analysis, homogenization, perforated domains, two-scale convergence, periodic unfolding method, Koiter shells.
