

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMMED KHIDER DE BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



# MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Magister en Mathématiques

Par  
Adouane Saida

Thème

LE PROBLEME INVERSE  
ET L'IDENTIFICATION DE PARAMETRE  
APPLICATION BIOLOGIQUE

Option

Analyse & Modèles Aléatoires

Soutenu publiquement le :

Devant le jury

Président	: B. MEZERDI	Pr	U.M.K. Biskra
Rapporteur	: A. NACIR	Pr	U.M.K. Biskra
Examineur	: S. BAHLALI	M.C	U.M.K. Biskra
Examineur	: A. BELAGGOUN	M.A.C.C	U.M.K. Biskra

# Table des matières

0.1	<b>Introduction :</b> . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Introduction et exemples</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Problèmes bien et mal posés . . . . .	8
1.3	Exemples de problèmes inverses . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Méthodes de régularisation</b>	<b>17</b>
2.1	Problèmes de moindres carrés linéaires – Décomposition en valeurs singulières . . . . .	17
2.1.1	Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés . . . . .	17
2.1.2	Décomposition en valeurs singulières de matrices . . . . .	21
2.1.3	Développement en valeurs singulières des opérateurs compacts . . . . .	26
2.2	Problèmes inverses linéaires . . . . .	28
2.2.1	La méthode de Tikhonov . . . . .	29
2.2.2	Applications de la décomposition en valeurs singulières . . . . .	42
2.3	Problèmes inverses non- linéaires - généralités . . . . .	46
2.3.1	Les trois espaces fondamentaux . . . . .	47
2.3.2	Formulation par moindres carrés . . . . .	48
2.3.3	Calcul du gradient – La méthode de l'état adjoint . . . . .	52
2.4	Quelques résultats d'existence et d'unicité dans les problèmes inverses . . . . .	60
2.4.1	Equations paraboliques type 1 : . . . . .	60
2.4.2	Equations paraboliques type 2 : . . . . .	64
2.4.3	Equations paraboliques type 3 : . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Réduction des variables par la théorie des courbes <math>\alpha</math>-denses</b>	<b>79</b>
3.1	Existence de courbes $\alpha$ -denses de longueur minimale dans un espace métrique : . . . . .	79
3.1.1	Courbes $\alpha$ -denses de longueur minimale dans un compact . . . . .	80

3.1.2	Recherche d'une courbe $\alpha$ -dense de longueur minimale dans un compact de $\mathbb{R}^n$ : . . . . .	83
3.1.3	Exemples de compacts connexes non $\alpha$ -densifiables : . . .	85
3.2	L'approximation des courbes remplissant l'espace par des courbes $\alpha$ -denses : . . . . .	86
3.3	Génération des courbes $\alpha$ -denses par la composition d'une fonction réelle : . . . . .	87
3.3.1	Génération des courbes $\alpha$ -denses par une famille de fonctions $\gamma$ -stochastiquement dépendantes : . . . . .	87
3.3.2	Génération de courbes $\alpha$ -denses par une fonction réelle : . . . . .	88
3.3.3	Une méthode constructive pour générer une courbe $\alpha$ -dense par la composition d'une fonction réelle : . . . . .	93
3.4	La méthode de la transformation réductrice Aliénor : . . . . .	94
3.4.1	La méthode Aliénor de base : . . . . .	94
3.4.2	Construction des courbes $\alpha$ -denses dans un pavé de $\mathbb{R}^n$ : . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Application médicale</b>	<b>108</b>
4.1	Algorithme d'identification : . . . . .	108
4.1.1	Présentation de la méthode d'identification : . . . . .	108
4.1.2	Organigramme de la méthode d'identification de $D, K$ : . . . . .	109
4.2	Modèle du gel d'agar agar : . . . . .	110
4.3	Modèle de diffusion extraction (ou/et pénétration) : . . . . .	110
4.4	Modèle de diffusion extraction convection : . . . . .	113

**Résumé:** Dans ce travail, le problème inverse dans une équation parabolique est étudié. Le coefficient de diffusion est une fonction inconnue de la profondeur  $x$ , la méthode de décomposition permet d'approcher la solution du système. L'existence et l'unicité dans ce genre de problème inverse sera aussi étudié. En fin nous essayons par la suite d'identifier le paramètre de Diffusion en minimisant une fonctionnel par une technique nouvelle appelée TOG (Technique d'Optimisation Globale), il s'agit en effet d'un croisement de deux méthodes utilisée pour le problème inverse. La matrice d'observation a été fournit par une expérience sur les concentrations en fonction du temps de la diffusion du produit et la profondeur durée des mesures.

**Mots clés:** Problème inverse, Identification le paramètre de diffusion, Méthodes de régularisation, Courbes  $\alpha$ -denses.

**Abstract:** In this work, the inverse problem in a parabolic equation is studied. The coefficient of diffusion is an unknown function; the method of decomposition makes it possible to approach the solution of the system. The existence and unicity in this kind of inverse problem will be also studied, in end we try thereafter to identify the parameter of diffusion by minimizing functional by a called technique new TGO (Technique of Global Optimization), it acts indeed of a crossing of two methods used for the inverse problem. The matrix of observation was provides by an experiment over the concentrations according to the time of the diffusion of the product and the profounder of concentration.

**Key words:** Inverse problem, identification the parameter of diffusion, Methods of regularization, Curves  $\alpha$ -dense.

**ملخص:** في هذا العمل، المشكل العكسي في معادلة القطع المكافئ قد درس. معامل الانتشار هو دالة مجهولة، طريقة التحليل تسمح بتقريب حل النظام. الوجود والوحدانية في هذا النوع من المشاكل العكسية سيدرس أيضا. في الأخير، نحن نحاول بعدها تعيين وسيط الانتشار بتخفيض التابعي بتقنية جديدة تسمى (تقنية بالتحسين الإجمالي)، المقصود فعلا تشابك طريقتين مستعملتين في المشكل العكسي. مصفوفة الملاحظة قد زودت بتجربة على التراكيز بدلالة زمن انتشار الناتج ومدة عمق القياسات.

**الكلمات الجوهرية:** مشكل عكسي، تعيين وسيط الانتشار، طرق الضبط، منحنيات  $\alpha$  كثيف.