

**Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene**



**Faculté de Mathématiques
Laboratoire d'Algèbre et Théorie des Nombres**

THESE

Présentée à L'USTHB

Pour l'obtention du grade de : **Magister en MATHÉMATIQUES**

Spécialité : **Algèbre et Théorie des Nombres**

Par M^{elle} **ZAHOUR Fadila**

Thème

**Sur les groupes de torsion de courbes elliptiques
définies sur des corps de nombres de degrés 2 et 3**

Soutenue le 17 décembre 2002 devant le jury composé de :

M ^r HACHAICHI. M.S	Maître de conférences à l'USTHB	Président
M ^r ZITOUNI . M	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
M ^r BETINA . K	Professeur à l'USTHB	Examineur
M ^r KESSI. A	Professeur à l'USTHB	Examineur
M ^r BOUCHENA .R	Chargé de cours à l'USTHB	Examineur

Sommaire

Introduction : 1

Chapitre I : Entiers et idéaux d'un corps de nombres

1. Corps de nombres quadratiques 3
2. Corps de nombres cubiques purs 5

Chapitre II : Théorie arithmétique des courbes elliptiques

1. Structures algébriques 7
2. Transformations d'équations et invariants arithmétiques 7
3. Structure de groupe abélien sur une courbe elliptique 9
4. Points singuliers d'une cubique plane 13
5. Isomorphismes de courbes elliptiques 19
6. Endomorphismes et isogénies de courbes elliptiques 22
7. Valuations d'un corps de nombres 24
8. Réduction d'une courbe elliptique en une VNAD v 28

Chapitre III : Torsion sur les courbes elliptiques

1. Coordonnées du point $P+P = 2P$ 34
2. Coordonnées du point $P+P+P = 3P$ 36
3. Coordonnées du point mP 36
4. Sous groupes de m -torsion et groupe de torsion 37
5. Isogénie, réduction et sous groupe de m -torsion 38
6. Racines de l'unités et sous groupe de m -torsion 40
7. Structure du groupe de torsion $E(\Theta)_{\text{tors}}$ 41
8. Nombres congruents et torsion 45

Chapitre IV : Courbes elliptiques sur un corps de nombres quadratique

1. Courbes elliptiques $E / \Theta(\sqrt{d})$ et points d'ordre premier 47

2. Groupe de torsion et invariant modulaire 49

Chapitre V : Courbes elliptiques sur un corps cubique pur 52

Bibliographie