

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN  
Mohamed Boudiaf**

**Faculté des sciences**

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE**  
**Présenté en vue de l'obtention du**  
**DIPLOME DE MAGISTER**

**Spécialité : Mathématiques appliquées**

**Option : Géométrie différentielle**

**Présenté par**

**BOUHARIS Amel**

**Sujet du mémoire**

**GEOMETRIE SPECTRALE RIEMANNIENNE ASSOCIEE A  
L'OPERATEUR LAPLACIEN SUR UNE VARIETE  
DE HEISENBERG.**

**Présenté le :**

**devant le jury composé de :**

<b>P<sup>r</sup> MESSIRDI. B</b>	<b>Professeur (Université D'ORAN ES-SENIA )</b>	<b>PRESIDENT</b>
<b>D<sup>r</sup> RAHMANI. S</b>	<b>Maître de conférences en Mathématiques (USTO)</b>	<b>RAPPORTEUR</b>
<b>D<sup>r</sup> RAHMANI. N</b>	<b>Maître de conférences en Mathématiques (USTO)</b>	<b>EXAMINATEUR</b>
<b>D<sup>r</sup> DJAA. M</b>	<b>Maître de conférences en Mathématiques (U.SAIDA)</b>	<b>EXAMINATEUR</b>

## Contents

<b>I Géométrie de l'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne compacte</b>	<b>5</b>
<b>1 Etude de l'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne compacte .</b>	<b>5</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	5
1.1.1 L'isomorphisme canonique : Dièse (noté #). . . . .	5
1.1.2 Isomorphisme canonique : bémol (noté $b$ ). . . . .	6
1.1.3 L'étude de l'opérateur Gradient sur une variété riemannienne. . . . .	7
1.1.4 L'étude de l'opérateur Divergence sur une variété riemannienne: . . . . .	7
1.1.5 Ecriture en coordonnées locales du laplacien sur une variété riemannienne . . . . .	9
<b>2 L'invariance du Laplacien par isometrie.</b>	<b>12</b>
2.1 Théorème. . . . .	12
<b>3 Spectre de l'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne .</b>	<b>16</b>
3.1 Définition. . . . .	16
<b>II Etude de l'opérateur Laplacien sur les groupes de Lie munis de métriques riemanniennes invariantes à gauche .</b>	<b>18</b>
<b>4 Expression locale de l'opérateur Laplacien <math>\Delta</math> sur un groupe de Lie <math>G</math> .</b>	<b>18</b>
4.1 Théorème d'URAKAWA. . . . .	18
4.2 Corollaire : . . . . .	20
<b>5 Exemple .</b>	<b>20</b>
<b>III Application - Détermination pratique du spectre de l'opérateur Laplacien sur un tore riemannien plat .</b>	<b>21</b>
<b>6 Généralités sur les représentations linéaires des groupes</b>	<b>21</b>
6.1 Définition d'une représentation linéaire d'un groupe . . . . .	21
6.1.1 Proposition . . . . .	22
6.1.2 Définitions -Remarques . . . . .	23

6.2	Lemme de SCHUR. . . . .	24
6.2.1	Enoncé du lemme de SCHUR. . . . .	24
6.2.2	Conséquences du lemme de SCHUR. . . . .	25
6.2.3	Cas des représentations unitaires continues . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Etude des représentations unitaires des groupes abéliens</b>	<b>25</b>
7.1	Caractères d'une représentation . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Enoncé simplifié du théorème de Peter Weil</b>	<b>27</b>
<b>9</b>	<b>Application au Calcul du spectre du Laplacien sur les tores <math>n</math>-dimensionnels plats.</b>	<b>27</b>
 <b>IV Propriétés de l'opérateur Laplacien <math>\Delta</math> sur les surfaces à courbure nulle .</b>		<b>29</b>
<b>10</b>	<b>Introduction à l'étude des tores <math>n</math>-dimensionnels .</b>	<b>29</b>
10.1	Sous groupes discrets uniformes de $R^n$ . . . . .	29
10.1.1	Définition. . . . .	29
10.1.2	Commentaires. . . . .	29
10.2	Notion d'un $C^k$ -revêtement . . . . .	30
10.2.1	Définition d'un $C^k$ -revêtement . . . . .	30
10.2.2	Théorème. . . . .	30
10.3	Notion d'un $C^k$ -revêtement riemannien . . . . .	32
10.3.1	Définition. . . . .	32
10.3.2	Théorème. . . . .	32
10.3.3	Proposition. . . . .	32
10.4	Classification des réseaux de $R^2$ . . . . .	34
10.4.1	Définition. . . . .	34
10.4.2	Classification des réseaux de $R^2$ . . . . .	35
10.4.3	Réseaux isométriques de $R^2$ . . . . .	36
10.5	L'isométrie des tores plats à deux dimensions . . . . .	36
10.5.1	Lemme: . . . . .	36
10.5.2	Proposition . . . . .	36
<b>11</b>	<b>Généralisation au cas des surfaces riemanniennes.</b>	<b>39</b>
11.1	Proposition. . . . .	39
11.2	L'isospectralité des bouteilles de Klein . . . . .	39
11.3	Proposition. . . . .	39
11.4	L'isospectralité des variétés de dimension 1 . . . . .	40
11.5	Proposition . . . . .	40

<b>V</b>	<b>Présentation du groupe de Heisenberg <math>H_{2p+1}</math> - Classification des sous groupes discrets uniformes de <math>H_{2p+1}</math>.</b>	<b>41</b>
12	Rappel sur les variétés de Heisenberg.	41
13	Présentation du groupe de Heisenberg .	41
13.1	Classification des sous groupes discrets uniformes de $H_{2p+1}$ . . . .	42
13.1.1	Sous groupes discrets uniformes de $H_{2p+1}$ . . . . .	42
13.1.2	Cas particulier des variétés de Heisenberg de dimension 3 .	44
14	Métriques invariantes à gauche sur le groupe de Heisenberg.	44
14.1	Les champs de vecteurs invariants à gauche : . . . . .	44
14.2	Classification des métriques invariantes à gauche sur $H_{2p+1}$ . . . . .	46
15	La détermination des champs de Killing sur le groupe de Heisenberg .	47
15.1	Définition d'un champ de Killing sur une variété riemannienne . .	47
15.2	La caractérisation des champs de Killing sur le groupe de Heisenberg de dimension 3 . . . . .	48
<b>VI</b>	<b>Propriétés de l'opérateur Laplacien sur les espaces fibrés principaux à fibres totalement géodésiques .</b>	<b>51</b>
16	Rappel sur les variétés fibrées principales.	51
16.1	Groupes de transformation de Lie . . . . .	51
16.2	Structure fibrée principale définie par un groupe de Lie. . . . .	52
17	Etude du spectre de la variété de Heisenberg de dimension 3 .	57
17.1	Rappels. . . . .	57
17.1.1	Commentaire. . . . .	57
17.2	Spectre de la variété de Heisenberg . . . . .	57
<b>VII</b>	<b>Mise en évidence d'exemples de variétés riemanniennes où l'isospectralité au sens de l'opérateur Laplacien entraîne leur isométrie au sens de la métrique riemannienne sous-jacente.</b>	<b>59</b>
18	Préliminaires .	59
18.1	Proposition . . . . .	59
18.2	Remarques -Commentaires . . . . .	59
18.3	Lemme. . . . .	61

<b>19 Résultat principal .</b>	<b>62</b>
19.1 Enoncé du théorème principal . . . . .	62
19.2 Preuve du théorème. . . . .	63
19.3 Remarque. . . . .	65
<b>VIII Annexes de résultats techniques .</b>	<b>66</b>
<b>20 Annexe 1 -Théorème concernant la racine d'une matrice carrée.</b>	<b>67</b>
<b>21 Annexe 2- Lemme.</b>	<b>69</b>
<b>22 Annexe 3 -Calcul de la courbure scalaire sur la variété de Heisenberg de dimension 3.</b>	<b>70</b>
22.1 Tenseur de Courbure et courbure scalaire sur une variété riemannienne. . . . .	70
22.2 Courbure de Ricci-Courbure scalaire sur un espace euclidien . . .	71
22.3 Calcul de la courbure scalaire sur la variété de Heisenberg de dimension 3. . . . .	72
<b>23 Annexe 4 - Rappels concernant la seconde forme fondamentale</b>	<b>74</b>
.	
<b>24 Annexe 5 .Notion de mesure sur une variété riemannienne.</b>	<b>75</b>
24.1 Notion de mesure sur un espace topologique localement compact .	75
24.1.1 Définition d'un espace de Riesz. . . . .	75
24.2 Notion de mesure sur les variétés différentiables. . . . .	76
24.2.1 Notion de mesure sur les variétés riemanniennes. . . . .	77
<b>25 Annexe 6 - Deuxième présentation des connexions Linéaires</b>	<b>78</b>
25.1 Application à l'opérateur divergence : . . . . .	78
25.2 Divergence d'un champ de tenseur : . . . . .	79
<b>26 Annexe7-Le développement asymptotique de Minakshisundaram - Pleijel .</b>	<b>79</b>
26.1 Rappel. . . . .	79
26.2 Rappel-Commentaires . . . . .	83