

République Algérienne Démocratique Et Populaire

**Ministère de L'Enseignement Supérieur
Et la Recherche Scientifique**

**Université Elchikh Elarbi Tbessi
- Tébessa -**

**Institut des Sciences Exactes
Département de Mathématiques**

Mémoire

**Présenté pour obtenir le Diplôme
de Magistère en Mathématiques**

THÈME

**EXISTENCE ET APPROXIMATION DE
POINT FIXE COMMUN
POUR CERTAINES APPLICATIONS**

**Option
Equations aux dérivées partielles**

Présenté Par:

Mr.FAYÇAL Merghadi

Devant le jury:

Président:	Mr. S. Mesloub	M.C. C.U. TEBESSA
Rapporteur:	Mr. A. Djoudi	M.C. U.B.M ANNABA
Examineur:	Mr. B. Khodja	M.C. U.B.M ANNABA
Examineur:	Mr. H. Boutabia	M.C. U.B.M ANNABA
Examineur:	Mr. A. Moumeni	C.C. U.B.M ANNABA

ملخص

يتركب هذا البحث من ثلاثة أجزاء، ويتركز خصوصا على دراسة وجودية و تقريب نقطة ثابتة مشتركة بالنسبة إلى تطبيقات لها قيود و شروط معينة.

في المحور الأول، تفحصنا الخاصيات الأساسية للنقطة الثابتة. هذا المحور استعمل فيه مبدأ التطبيق المتقلص لبناخ. هذه النظرية تمثل مرة أخرى الأداة الرئيسية للتقارب بالنسبة لأصناف كثيرة من الطرق التكرارية الترددية. كذلك نجد نظريات أخرى مثلها لبراور و كاكوتاني. هذه النظريات الأخيرة تتعلق خاصة بالبنية الطوبولوجية للفضاءات بالأحرى على طبيعة التطبيقات. وهم قليلو الفعالية في الحالة التي لا تتوفر فيها المتتاليات الترددية (التكرارية) حيث لا نستطيع حساب النقط الثابتة. مع تطرقنا كذلك لمجموعة من الأمثلة تبين فائدة بعض النظريات الرياضية المعطاة.

المحور الثاني يحوي نتائج مغيرة و محسنة بمعنى سندقق في بعض النتائج الموجودة في مجال البحث.

اكثر وضوحا. أخذنا مرة أخرى تطبيقات تحقق بعض الشروط و برهنا انه إذا كانت متتالية ايشيكاوا المتعلقة بهذه التطبيقات متقاربة فان نهايتها هي نقطة ثابتة لهذه التطبيقات.

الأساس في مساهمتنا يتموضع في المحور الأخير. حيث أخذنا اضعف مبدأ للدوال التوافقية لا نشاء و برهنة نظرية جديدة في النقطة الثابتة من نوع قريوقوس. هذه النظرية حسنت بحث جديد لبناك من اجل صنف كبير من التطبيقات ليسوا بالضرورة مستمرين.

RESUME

La thèse est composée de trois parties, elle est centrée sur l'étude d'existence et d'approximation de point fixe commun pour des applications ayant certaines restrictions.

Dans le premier chapitre, on explore les propriétés de point fixe. Ce chapitre met en œuvre le principe de l'application contractante de Banach. Ce théorème représente un outil fondamental de convergence pour une large classe de méthodes itératives. On trouve aussi d'autres théorèmes comme celui de Brouwer et Kakutani. Ces derniers théorèmes dépendent plus sur la structure topologique des espaces plutôt que le caractère des applications. Ils sont moins constructifs dans le sens qu'ils n'offrent pas de processus itératifs capable de calculer les points fixes. Une quantité d'exemples montrant l'utilité de tels théorèmes en mathématiques sont donnés.

Le deuxième chapitre contient des résultats modifiés et améliorés dans un sens que l'on précisera de certains résultats qui existent déjà dans ce domaine de recherche. Plus clairement, on reconsidère des applications satisfaisant certaines conditions et on démontre que si la méthode d'Ishikawa associée à ces applications converge, alors la limite est un point fixe commun de ces applications.

L'essentiel de notre contribution se situe dans le dernier chapitre. On utilise la plus faible des notions de compatibilité de fonctions pour établir et prouver un nouveau théorème de point fixe commun de type Gregus. Ce théorème étend et améliore un récent travail de Pathak et all pour une large classe d'applications non nécessairement continues.

ABSTRACT

The purpose of the present thesis is to study and approximate some fixed point theorems for self mappings having some restrictions.

The first chapter contains a very detailed discussion on the Banach contraction mapping principle. As we know, the Banach fixed point theorem represents a fundamental convergence theorem for a broad class of iteration methods. Further, some important theorems on fixed point such as Brouwer and Kakutani theorems are stated. These theorems utilize the topological structure of the underlying vector space rather than any (contraction) property of the mappings. These theorems, however, are not constructive in the sense that they do not suggest any schemes for the computation of fixed points. A number of examples are given to show the importance of such theorems in mathematics.

Chapter two contains some modified results existing in this domain of investigation. Clearly, we consider a pair of self mappings satisfying some contractive conditions and show that if the sequence of Ishikawa associated to these functions converges, then the limit is a common fixed point of these applications.

Chapter three contains our main contribution in this field of investigation. Clearly, we state the definition of least condition of compatibility of functions, called weakly compatible maps, to establish and prove a new common fixed point theorem of Gregus type. This theorem improve and extend a recent work of Pathak et al to a large class of functions not necessarily continuous.

Table des matières

1	Introduction.	2
2	Propriétés du point fixe.	5
2.1	Théorème de valeurs intermédiaires.	9
2.2	Théorème de point fixe de Banach.	15
2.3	Théorème de point fixe de Brouwer.	26
2.4	Théorème de point fixe de Kakutani.	28
3	Approximations de point fixe dans un espace vectoriel métrique.	30
3.1	Espace vectoriel métrique.	31
3.2	F-normes.	35
3.3	Approximation de points fixes communs.	38
3.4	Convergence des suites d'Ishikawa.	47
4	Applications compatibles et Points fixes.	57
4.1	Comparaison des applications compatibles.	59
4.2	Un théorème de point fixe commun.	65