

République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
Et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE ANNABA

**MEMOIRE**

Présenté à l'institut de mathématiques  
Pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Par

**M<sup>me</sup>: BAHLOUL Hayette**

**OPTION : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET  
THEORIE SPECTRALE**

**THEME**

**ETUDE SPECTRALE DE SYSTEMES  
DIFFERENTIELS LINEAIRES ET NON LINEAIRES  
( COOPERATIFS ET NON COOPERATIFS )**

SOUTENU LE : / / 1998

Devant le jury composé de

Président :	M <sup>r</sup> DENCHE M.	M.C. UNIV. DE CONSTANTINE
Rapporteur :	M <sup>r</sup> DJELLIT A.	C.C. UNIV. DE ANNABA
Examineur :	M <sup>lle</sup> REBBANI F.	M.C. UNIV. DE ANNABA
Examineur :	M <sup>r</sup> SCHINDLER I.	M.C. UNIV. DE TOULOUSE

## *Résumé*

Dans ce travail nous nous sommes intéressés aux solutions de problèmes elliptiques dans un ouvert non borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Il s'agit dans le premier chapitre de montrer l'existence de valeurs propres principales de problèmes complètement indéfinis de la forme

$$-\Delta u + qu = \lambda g(x) u, \quad \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Nous avons pu établir des théorèmes d'existence par des méthodes de comparaisons.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de systèmes elliptiques coopératifs de deux équations à deux fonctions inconnues  $u$  et  $v$ , de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1(x)u = a\rho_1(x)u + b\rho_2(x)v + f \\ -\Delta v + q_2(x)v = a\rho_3(x)u + b\rho_4(x)v + g \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Ces systèmes admettent des solutions positives en vertu du principe du Maximum combiné avec le lemme de Lax-Milgram

Enfin le troisième chapitre traite des problèmes semi linéaires de la forme

$$-\Delta u + f(x, u) = \lambda g(x) u, \quad \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Nous montrons que ces équations admettent des couples de solutions  $(\lambda_n, u_n)$  en appliquant la théorie de Iusternik-Schnirelmann, qui n'est autre que le développement du principe du Min-Max associé aux problèmes linéaires.

### *Abstract*

In this work, we study some elliptic problems in an unbounded domain of  $\mathbb{R}^n$ .

In the first part, we discuss the existence of principal eigenvalues set of the compitly indifinit problem

$$-\Delta u + qu = \lambda g(x) u, \quad \text{on } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

With the help of comparison methods, we establish conditions of existence.

Secondly, we treat elliptic cooperatif systems. The problem is given with a form

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1(x)u = a \rho_1(x)u + b \rho_2(x)v + f \\ -\Delta v + q_2(x)v = a \rho_3(x)u + b \rho_4(x)v + g \end{cases} \quad \text{on } \Omega \subset \mathbb{R}^n .$$

Positive solutions are obtained with the arme of the Lax-Milgram lemma and a Maximum principal.

Finally, we consider the semilinear eigenvalue problem

$$-\Delta u + f(x, u) = \lambda g(x) u \quad \text{on } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Our object here is to proof the existence of eigenpairs  $(\lambda_n, u_n)$  with the Ljusternick-Schnirelmann theory wich is the performant version of the Max-Min principal.

# TABLE DE MATIERE

	Page
INTRODUCTION.....	1
<b>CHAPITRE I: VALEURS PROPRES DE PROBLEMES COMPLETEMENT INDEFINIS.</b>	
Paragraphe 2.1 Introduction.....	9
Paragraphe 2.2 Préliminaires et rappels de résultats.....	10
Paragraphe 2.3 Existence de valeurs propres principales de problèmes complètement indéfinis.....	11
<b>CHAPITRE II: PRINCIPE DU MAXIMUM ET EXISTENCE DE SOLUTIONS POSITIVES POUR DES SYSTEMES " COOPERATIFS".</b>	
Paragraphe 2.1 Introduction.....	19
Paragraphe 2.2 Principe du maximum pour un système elliptique linéaire coopératif à deux équations.....	21
Paragraphe 2.3 Existence et unicité de la solution positive pour des systèmes coopératifs à deux équations.....	25
<b>CHAPITRE III: EXISTENCE DU SPECTRE D'UN PROBLEME NON LINEAIRE.</b>	
Paragraphe 3.1 Introduction.....	32
Paragraphe 3.2 Existence du spectre d'une classe d'opérateurs elliptiques semi linéaires.....	41
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	49