

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BATNA  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

**THESE**

Présentée par

**BAHLALI SEID**

Pour l'obtention du grade de docteur en sciences  
*Spécialité : Mathématiques*  
*Option : probabilités et processus stochastiques*

APPROXIMATION ET CONDITIONS NECESSAIRES  
D'OPTIMALITE POUR DES PROBLEMES DE CONTROLES  
STOCHASTIQUES RELAXES

Soutenue le 23 juin 2002

Devant le jury composé de:

<b>BENACER Rachid</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Batna</b>	<b>Président</b>
<b>OUKNINE Youcef</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Marrakech</b>	<b>Examineur</b>
<b>MEZERDI Brahim</b>	<b>Maître de conférence</b>	<b>Université de Biskra</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>REBIAI Salah Eddine</b>	<b>Maître de conférence</b>	<b>Université de Batna</b>	<b>Examineur</b>
<b>MELKEMI Lamine</b>	<b>Maître de conférence</b>	<b>Université de Biskra</b>	<b>Examineur</b>

# ملخص

في هذه الأطروحة ندرس قضايا التحكم للمعادلات التفاضلية العشوائية. في هذا السياق و بصفة خاصة ينصب هذا البحث نحو دراسة التقريب و الشروط اللازمة لوجود قيمة اعضمية للقضية المدروسة. في الفصلين الأولين نقدم مبادئ القيمة العضمي في قضايا التحكم العشوائي وبصفة أدق نعطي نتائج كوشنير و هوسمان و بانغ. في الفصلين الثالث و الرابع نقدم نتيجتين جديدتين تخص قضايا التحكم العشوائي بحيث جملة السيرورات التي تعرف هذه القضايا تكون توابع عشوائية تأخذ قيمها في فضاء القياسات. الجزء الثاني و الأخير من هذا العمل و هو متكون من الفصلين الخامس و السادس يخص قضايا التقريب في التحكم العشوائي و في هذا الصدد نعطي نتيجتين جديدتين تحسن بكثير النتائج المعروفة في هذا المجال ونخص بالذكر نتائج فليمنغ و ميايار و بهلالي-مزردي-اوكنين.

# Abstract

In this work we consider stochastic control problems, in which admissible controls are measure valued processes. Our interest goes particularly to approximation and necessary conditions for optimality. We derive two new stochastic maximum principles. The first one deals with problems where the dynamic is controlled via the drift only. This result is the first which covers relaxed controls and extends the known ones in this field, in particular those of Kushner, Bensoussan. The second one is devoted to stochastic differential equations where both the drift and the diffusion matrix are allowed to depend upon the control variable. The proof is based on the reformulation of the dynamics as SDE driven by martingale measures. The main result is derived by using second order necessary conditions and some stability properties of the state equations and the adjoint processes. This result improves the other ones known in the literature, especially the Peng's second order maximum principle. The other part of this work concerns approximation for which we give two main contributions. We prove for stochastic control problems where the drift is controlled that under the uniform ellipticity of the diffusion matrix and pathwise uniqueness of solutions, each relaxed diffusion can be approximated by a sequence of strict ones. This result improves in particular the results of Fleming and Bahlali-Mezerdi-Ouknine. The second contribution is a stability theorem for controlled equations driven by martingale measures. It is proved under continuity assumptions on the coefficients, extending Méléard's result proved under a Lipschitz condition.

**Key words.** Stochastic differential equation, Stochastic control, Relaxed control, Martingale-measure, Maximum principle, Variational principle, Backward stochastic differential equation, Adjoint process, Tightness, Pathwise uniqueness.

**Stochastic processes and Optimal Control.**

**AMS Subject Classification.** Primary 93E20, 60H30. Secondary 60G44, 49N10

## Résumé

Dans ce travail nous considérons des problèmes de contrôle stochastique, dans lesquels les contrôles admissibles sont des processus à valeurs mesures. Notre intérêt va en particulier vers les questions d'approximation et des conditions nécessaires d'optimalité. On démontre deux principes du maximum. Le premier est consacré aux problèmes où la dynamique est contrôlée par l'intermédiaire de la dérive. Ce résultat est le premier qui couvre le cas des contrôles relaxés et améliore les autres résultats connus dans le domaine, en particulier ceux de Kushner, Bensoussan. Le deuxième principe du maximum est démontré pour des équations différentielles stochastiques où la dérive ainsi que la matrice de diffusion sont contrôllés. Il s'est avéré que la reformulation des équations d'état comme des EDS dirigées par des martingales mesures joue un rôle essentiel. Le résultat essentiel est prouvé en utilisant les conditions nécessaires du second ordre ainsi que certaines propriétés de stabilité des équations d'état et des processus adjoints. Ce principe du maximum améliore sensiblement ceux connus dans la littérature, en particulier le principe du second ordre de Peng. L'autre partie de ce travail concerne l'approximation pour les problèmes de contrôle, pour lesquels on établit deux résultats nouveaux. On montre pour des problèmes de contrôle stochastique où le drift est contrôllé que sous une hypothèse d'ellipticité uniforme de la matrice de diffusion et l'unicité trajectorielle, que toute diffusion associée à un contrôle relaxé peut être approchée par une suite de diffusions associées à des contrôles stricts. Cette contribution améliore en particulier les résultats de Fleming et Bahlali-Mezerdi-Ouknine. La deuxième contribution dans cette direction est un théorème de stabilité pour des équations contrôllées, dirigées par une martingale mesure. Ce dernier résultat est montré sous des conditions de continuité, généralisant ainsi un résultat de Méléard.

**Mots clés.** Equation différentielle stochastique, Contrôle stochastique, Contrôle relaxé, Martingale-mesure, Principe du maximum, Principe variationnel, Equation différentielle stochastique rétrograde, Processus adjoint, Tension, Unicité trajectorielle.

**Processus stochastiques et contrôle optimal.**

**AMS Subject Classification.** Primary 93E20, 60H30. Secondary 60G44, 49N10

# Plan

<b>Introduction</b> .....	<b>P I</b>
<b>Chapitre 1 - Principe du maximum en contrôle optimal stochastique</b> .....	<b>P 1</b>
1 - Formulation du problème et hypothèses .....	P 1
2 - Estimation des solutions .....	P 3
3 - Principe du maximum .....	P 6
4 - Equation adjointe .....	P 8
5 - Principe du maximum approché .....	P 9
6 - Equation adjointe approchée .....	P 12
<b>Chapitre 2 - Principe du maximum du second ordre en contrôle des diffusions</b> .....	<b>P 13</b>
1-Formulation du problème et hypothèses .....	P 13
2 - Estimation des solutions .....	P 15
3 - Principe du maximum du second ordre .....	P 21
3.1 - Estimation du premier ordre .....	P 21
3.2 - Estimation du second ordre .....	P 23
3.3 - Principe du maximum .....	P 26
3.4 - Equations et processus adjoints .....	P 27
4 - Principe du maximum approché du second ordre .....	P 28
4.1 - Estimation des solutions approchées .....	P 28
4.2 - Principe du maximum approché généralisé .....	P 30
4.3 - Equations adjointes approchées .....	P 31
<b>Chapitre 3 - Principe du maximum en contrôle stochastique relaxé</b>	<b>P 32</b>
1 - Formulation du problème et hypothèses .....	P 33
1.1 - Description du problème de contrôle relaxé .....	P 34
1.2 - Une représentation des contrôles relaxés optimaux .....	P 36
2 - Théorème d'existence .....	P 38
3 - Approximation des trajectoires .....	P 41
4 - Principe du maximum pour un contrôle $\varepsilon_n$ -optimal .....	P 43
5 - Principe du maximum relaxé .....	P 45
6 - Méthode utilisant les équations rétrogrades .....	P 49

<b>Chapitre 4 - Principe du maximum de diffusion gouvernée par une martingale-mesure .....</b>	<b>P 54</b>
1 - Contrôles relaxés et martingale-mesures .....	P 54
1.1 - Définitions et propriétés .....	P 55
1.2 - Martingales-mesures : définitions et propriétés .....	P 56
2 - Formulation du problème et hypothèses .....	P 56
3 - Approximation des trajectoires .....	P 58
4 - Généralisation du principe du maximum relaxé .....	P 60
<b>Chapitre 5 - Approximation en contrôle optimal des processus de diffusion .....</b>	<b>P 69</b>
1 - Formulation du problème et hypothèses .....	P 69
2 - Le model relaxé .....	P 70
3 - Approximation du model relaxé .....	P 71
<b>Chapitre 6 - Approximation des diffusions gouvernées par une martingale mesure .....</b>	<b>P 78</b>
1 - Formulation du problème .....	P 78
2 - Le model relaxé .....	P 79
3 - Approximation du model relaxé .....	P 80
<b>Annexe .....</b>	<b>P 86</b>
<b>Conclusion .....</b>	<b>P 88</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>P 89</b>