

N° d'ordre : 08/2002-M/MT

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

*Pour l'obtention du titre de*

**MAGISTÈRE**

*Spécialité : Mathématiques*

*Option : Probabilités et Statistiques*

*Présentée par : BENAMEUR Belkacem*

*Sujet de la thèse :*

*Systemes de Files d'Attente*  
*Avec*  
*Arrivées Négatives et Rappels*

*Soutenue le lundi 27 mai 2002 devant le jury composé de :*

<b>Mr. DJEDDOUR. M</b>	<i>Professeur à l'USTHB</i>	<b>Président</b>
<b>Mr. AISSANI . A</b>	<i>Professeur à l'USTHB</i>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Mr. KHELLADI. A</b>	<i>Professeur à l'USTHB</i>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. FELLAG. H</b>	<i>Maître de conférences à l'UMMTO</i>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. ASTOUATI. M.A</b>	<i>Chargé de cours à l'USTHB</i>	<b>Examineur</b>

# TABLE DES MATIERES

<b>RESUME</b>	1
<b>INTRODUCTION</b>	2
<b>1. Phénomènes d'attente et processus stochastiques</b>	8
<b>1.0. Introduction</b>	9
<b>1.1. Préliminaires</b>	10
1.1.1. Classification des systèmes d'attente	10
1.1.2. Analyse mathématique	10
1.1.3. Equations différentielles exactes	11
1.1.4. Equations différentielles de premier ordre	13
1.1.5. Transformée de Laplace	15
1.1.6. Transformée de Laplace inverse	16
1.1.7. Equations intégrales de Fredholm de première espèce	17
1.1.8. Problèmes improprement posés	17
1.1.9. Méthode de Tikhonov	18
<b>1.2. Processus de Poisson et la distribution exponentielle</b>	19
1.2.1. Processus de comptage	19
1.2.2. Une relation fondamentale	19
1.2.3. Processus de Poisson	19
1.2.4. Intervalle entre deux évènements	21
1.2.5. Superposition	22
1.2.6. Nombre d'évènements pendant un intervalle aléatoire	22
1.2.7. Processus de renouvellement	23
<b>1.3. Système d'attente <math>M/G/1</math></b>	25
1.3.1. Méthode de la variable supplémentaire	25
1.3.2. Méthode de la chaîne de Markov induite	26
1.3.3. Distribution stationnaire	27
1.3.4. Le nombre moyen de clients dans le système	29
1.3.5. Ergodicité d'un système d'attente $M/G/1$	30
<b>2. <math>M/G/1</math> avec arrivées négatives</b>	32
<b>2.0. Introduction</b>	33
<b>2.1. Méthode et terminologie</b>	34
<b>2.2. RCE avec la discipline FCFS</b>	35
2.2.1. Remarques sur la nature numérique de la solution	46
2.2.2. Cas spéciaux	46
<b>2.3. RCH avec la discipline FCFS</b>	47

<b>2.4. Files d'attente avec la discipline LCFS-PRR</b>	50
2.4.1. RCH avec la discipline LCFS-PRR	50
2.4.2. Cas spéciaux	54
2.4.3. Période d'activité du serveur pour le modèle <i>M/G/1</i> , LCFS-PRR	55
2.4.4. RCE avec la discipline LCFS-PRR	56
<b>2.5. Discussion des résultats numériques du cas RCE-FCFS</b>	58
2.5.1. Comparaison de $p_1(x)$ dans les deux cas : <i>M/M/1</i> avec arrivées négatives et <i>M/G/1</i> sans arrivées négatives	58
2.5.2. Un algorithme itératif	60
<b>2.6. Conclusion</b>	62
<b>3. Systèmes de files d'attente avec arrivées négatives et rappels</b>	63
<b>3.0. Introduction</b>	64
<b>3.1. <i>M/M/1</i> avec arrivées négatives et rappels</b>	65
3.1.1. Description du modèle mathématique	65
3.1.2. La chaîne de Markov induite aux temps de complétion de service ou d'élimination	66
3.1.3. Conclusion	76
<b>3.2. La méthode de la variable supplémentaire</b>	77
3.2.1. Description du modèle mathématique	77
3.2.2. Distribution limite de l'état du système	78
3.2.3. Remarques sur la nature numérique de la solution	93
3.2.4. Cas spéciaux	93
3.2.5. Discussion des résultats numériques	100
3.2.5.1. Comparaison de $P_{10}(x)$ dans les deux cas : <i>M/M/1</i> avec arrivées négatives et rappels et <i>M/G/1</i> avec rappels et sans arrivées négatives	100
<b>Conclusion</b>	103
<b>Références</b>	104

## RESUME

L'intérêt porté aux systèmes de files d'attente avec arrivées négatives — où l'arrivée d'un client négatif a l'effet d'éliminer un certain client ordinaire du système —, introduits par Gelenbe[23,24], est initialement motivé par la modélisation des réseaux de neurones où les arrivées positives et négatives représentent respectivement, les signaux excitateurs et inhibiteurs.

Dans le chapitre premier, on donne la description d'un système d'attente et les définitions de quelques notions mathématiques et concepts des processus stochastiques en usage dans la théorie des files d'attente.

Le chapitre deuxième est consacré à l'analyse de Harrison et Pitel [29] où des expressions des fonctions génératrices des distributions de probabilité du nombre de clients dans la file sont déterminées pour un système d'attente à un seul serveur avec un temps de service de loi générale et deux flots poissonniens indépendants d'arrivées positives (ordinaires) et négatives. Une arrivée négative a l'effet d'éliminer un client positif si le système est non vide. Concernant le cas de la discipline FCFS pour les clients positifs, on compare les stratégies d'élimination avec lesquelles soit le dernier client de la file (RCE) soit celui en service (RCH) est éliminé. Le cas de la discipline LCFS-PRR (interruption du service et reprise d'un service d'une autre durée) pour les clients positifs combinée avec la stratégie d'élimination du client en service par les clients négatifs est aussi considéré — l'analyse du cas où c'est le dernier client de la file qui est éliminé est similaire à celle du cas FCFS —. Les résultats nous mènent à des fonctions génératrices différentes contrairement au cas où les temps de service sont d'une distribution exponentielle. Cela est aussi remarqué dans la condition de stabilité. Finalement, pour éviter de résoudre l'équation intégrale de Fredholm de première espèce résultée dans le premier cas, un algorithme itératif est proposé.

Le chapitre troisième est consacré à l'étude d'un système d'attente  $M/G/1$  avec arrivées négatives et rappels. Dans la première partie de ce chapitre, J.R.Artalejo[4] a calculé sous la condition d'ergodicité du processus décrivant l'état du système, les distributions de probabilité de la chaîne de Markov induite aux instants des complétions des services ou des éliminations ainsi que leurs moments factoriels correspondants.

Dans la deuxième partie, on a fait une étude complète d'un système  $M/G/1$  avec arrivées négatives et rappels moyennant la méthode de la variable supplémentaire. Des expressions des fonctions génératrices partielles des distributions de probabilité conjointes du nombre de clients dans le système et de l'état du serveur — libre ou bien en activité — sont déterminées. L'analyse est réduite à une équation intégrale de Fredholm de première espèce dont l'analyse numérique est fréquemment considérée comme étant un problème improprement posé. La complexité des conditions de stabilité — pour chaque type de rappel — nous contraint à les remplacer par des inégalités équivalentes. Pour les deux cas spéciaux :  $M/M/1$  avec arrivées négatives et  $M/G/1$  sans arrivées négatives, on a obtenu des expressions explicites dans le cas de rappel constant. Cependant dans le cas de rappel linéaire, des intégrales interviennent dans les expressions des résultats obtenus.