

Thèse

présentée à

L'Université Denis Diderot Paris 7

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Denis Diderot Paris 7

spécialité

Informatique

par

Hugues Calbrix

sur le sujet

Mots ultimement périodiques des langages  
rationnels de mots infinis

L.I.T.P. – I.B.P.

Soutenue le 19 février 1996  
devant le jury composé de

|                  |              |
|------------------|--------------|
| Serge Grigorieff | Examineur    |
| Daniel Krob      | Rapporteur   |
| Bertrand Le Saëc | Rapporteur   |
| Maurice Nivat    | Directeur    |
| Andreas Podelski | Examineur    |
| Brigitte Rozoy   | Examinatrice |

# Table des matières

|                                                 |           |
|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                             | <b>5</b>  |
| <b>1 Mots finis et infinis, automates</b>       | <b>15</b> |
| 1.1 Mots finis et infinis . . . . .             | 15        |
| 1.2 Monoïdes et semigroupes . . . . .           | 15        |
| 1.3 Congruences et semicongruences . . . . .    | 17        |
| 1.4 Mots primitifs . . . . .                    | 17        |
| 1.5 Itération infinie . . . . .                 | 23        |
| 1.6 Morphismes . . . . .                        | 25        |
| 1.7 Automates et langages . . . . .             | 28        |
| 1.8 Langages rationnels de mots finis . . . . . | 29        |
| <b>2 Langages rationnels de mots infinis</b>    | <b>35</b> |
| 2.1 Le théorème de Kleene . . . . .             | 35        |
| 2.2 Reconnaissance par une congruence . . . . . | 39        |
| 2.3 Congruence syntaxique . . . . .             | 42        |
| 2.4 Morphismes et rationalité . . . . .         | 44        |
| 2.5 Mots ultimement périodiques . . . . .       | 46        |
| <b>3 Représentations finies</b>                 | <b>49</b> |
| 3.1 Définitions . . . . .                       | 49        |
| 3.2 Premières propriétés . . . . .              | 51        |
| 3.3 Conjugaison, racine et puissance . . . . .  | 53        |
| 3.4 Rationalité de $L_{\S}$ . . . . .           | 58        |
| 3.5 Congruences syntaxiques . . . . .           | 63        |
| <b>4 Préfixes et périodes</b>                   | <b>67</b> |
| 4.1 Définitions . . . . .                       | 67        |

|          |                                                                                           |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2      | Périodes . . . . .                                                                        | 68         |
| 4.3      | Problèmes de décision . . . . .                                                           | 72         |
| 4.4      | Les langages d'Ératosthène . . . . .                                                      | 74         |
| 4.5      | Mots terminaux et quasiterminaux . . . . .                                                | 76         |
| 4.6      | Préfixes . . . . .                                                                        | 78         |
| 4.6.1    | Première tentative, les diverses limites . . . . .                                        | 79         |
| 4.6.2    | Seconde tentative: l'analyse syntaxique . . . . .                                         | 84         |
| <b>5</b> | <b>Représentations partielles</b>                                                         | <b>87</b>  |
| 5.1      | Représentations saturées par <i>Puis</i> . . . . .                                        | 87         |
| 5.1.1    | Premières propriétés . . . . .                                                            | 87         |
| 5.1.2    | Manipulations . . . . .                                                                   | 90         |
| 5.2      | Représentations injectives . . . . .                                                      | 98         |
| 5.2.1    | Représentations minimales . . . . .                                                       | 98         |
| 5.2.2    | Le cas des langages rationnels contenant des mots non<br>ultimement périodiques . . . . . | 102        |
| <b>6</b> | <b>La théorie S1S</b>                                                                     | <b>105</b> |
| 6.1      | Définitions . . . . .                                                                     | 106        |
| 6.2      | Le théorème de Büchi . . . . .                                                            | 107        |
| 6.3      | Expressivité de la logique S1S . . . . .                                                  | 109        |
| 6.4      | Réciproque du théorème de Büchi . . . . .                                                 | 111        |
| 6.5      | Une méthode de décision . . . . .                                                         | 112        |
| <b>7</b> | <b>Une construction directe</b>                                                           | <b>115</b> |
| 7.1      | Principe de la construction . . . . .                                                     | 115        |
| 7.2      | La construction . . . . .                                                                 | 117        |
| 7.3      | Déterminisation . . . . .                                                                 | 121        |