



**INSTITUT  
BLAISE PASCAL**

FÉDÉRATION D'UNITÉS - FU0007

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

**Probleme du mot des monoides présentés  
par un seul relateur**

**G. WATIER**

**Thèse de l'Université Denis Diderot - Paris VII  
Litp Th96/01 Février 1996**

**LABORATOIRE  
INFORMATIQUE THÉORIQUE  
ET PROGRAMMATION**



THÈSE  
présentée à  
L'UNIVERSITÉ DE PARIS 7  
pour l'obtention du titre de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS 7  
spécialité  
INFORMATIQUE  
par  
GUILLAUME WATIER  
sur le sujet  
PROBLÈME DU MOT DES MONOÏDES  
PRÉSENTÉS PAR UN SEUL RELATEUR

LITP - IBP

soutenue le 23 janvier 1996 devant le jury composé de Messieurs

Jacques Sakarovitch	Président
Christian Choffrut	Directeur
Hubert Comon	Rapporteur
Géraud Sénizergues	Rapporteur
Maxime Crochemore	Examineur
Friedrich Otto	Examineur
Jean-Eric Pin	Examineur

### Résumé

Soit un monoïde admettant une présentation à un seul relateur

$$\langle A; u = v \rangle$$

où  $u$  et  $v$  sont des mots sur l'alphabet  $A$ . Il n'a pas encore été montré que le problème du mot d'un tel monoïde soit décidable en toute généralité, bien qu'une conjecture existe dans ce sens.

Nous présentons le problème, les approches utilisées dans la littérature et celles envisageables. Nous dégageons ensuite des propriétés générales sur certaines factorisations de mots, propriétés qui ont leur intérêt propre dans la combinatoire des mots. Enfin nous appliquons ces dernières à notre problème dans le cas où le mot  $u$  est un mot qui ne se chevauche pas avec lui-même. Pour ce cas - qui, nous le verrons, concerne une très large classe de présentations - la meilleure contribution apportée jusqu'ici autorise à décider le problème si le mot  $u$  apparaît en facteur dans le mot  $v$ . Nous étendons ce résultat en supprimant la contrainte "  $u$  apparaît en facteur dans  $v$  " sous réserve que la longueur de  $v$  soit au moins le carré de celle de  $u$ .

### Abstract

Let  $M$  be a monoid having a single relator presentation

$$\langle A; u = v \rangle$$

where  $u$  and  $v$  are words on the alphabet  $A$ . Generally speaking, the word problem for  $M$  has not yet been proved decidable, though there is a conjecture in this direction.

We introduce the problem, the ways it has formerly been handled and how it could now be treated. Then, we show general properties about some factorisations of words, properties that have their own interest in combinatorics of words. We apply them to our problem in the case when the word  $u$  is not self-overlapping. In this case - which, as we shall show, concerns a large class of presentations - the best contribution up to now states that the word problem is decidable if the word  $u$  is a factor of  $v$ . We extend this result by suppressing the condition "  $u$  is a factor of  $v$  " provided that the length of  $v$  is at least the square of the length of  $u$ .

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Notations et définitions</b>	<b>15</b>
2.1	Mots, monoïde libre . . . . .	15
2.2	Langages rationnels . . . . .	17
2.3	Codes . . . . .	17
2.4	Relations binaires . . . . .	18
2.5	Réécriture . . . . .	18
2.6	Présentations et problème du mot . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Approches possibles du problème</b>	<b>23</b>
3.1	Par système de réécriture complet . . . . .	23
3.1.1	Par système de réécriture fini convergent . . . . .	24
3.1.2	Par système de réécriture infini convergent . . . . .	24
3.2	Par finitude résiduelle . . . . .	25
3.3	En réduisant le problème . . . . .	25
3.4	En étudiant la divisibilité gauche . . . . .	29
<b>4</b>	<b>La procédure d'Adjan</b>	<b>31</b>
4.1	Décider la divisibilité gauche suffit . . . . .	31
4.2	Le semi-algorithme d'Adjan . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Propriétés sur les mots</b>	<b>41</b>
5.1	Propriétés sur un mot et ses facteurs . . . . .	41
5.2	Propriétés du code $\mathcal{P}_i$ . . . . .	44
<b>6</b>	<b><math>\langle A; u = v \rangle</math> où <math>u</math> est sans bord</b>	<b>57</b>
6.1	Restrictions de la procédure . . . . .	58
6.2	Résultats de décidabilité . . . . .	68

6	<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	
<b>7</b>	<b>Perspectives</b>	<b>91</b>
<b>8</b>	<b>ANNEXE : calcul de <math>P</math></b>	<b>93</b>
8.1	Énoncé du problème . . . . .	93
8.2	Algorithme linéaire . . . . .	94