

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS 7

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité

INFORMATIQUE

par

GIOVANNA GUAIANA

sur le sujet

PARTIES RECONNAISSABLES ET MORPHISMES
SUR LES MONOÏDES TRACE

*Soutenue le 8 juillet 1994
devant le jury composé de Messieurs :*

Christian Choffrut	<i>Président</i>
Pascal Weil	<i>Directeur</i>
Volker Diekert	<i>Rapporteur</i>
Paul Gustin	<i>Rapporteur</i>
Yves Métivier	<i>Rapporteur</i>
Dominique Perrin	<i>Examineur</i>
Jean-Eric Pin	<i>Examineur</i>

RESUME

Cette thèse porte sur les monoïdes partiellement commutatifs libres ou monoïdes trace, qui constituent un des principaux modèles sémantiques du parallélisme. Les thèmes abordés sont essentiellement la reconnaissabilité des langages trace et le codage sur les monoïdes trace.

Pour ce qui concerne le premier thème, nous donnons une nouvelle preuve de la clôture par produit de la famille des langages trace reconnaissables. Notre approche utilise une décomposition du langage produit induite par un treillis associé au graphe des commutations. Cela fournit un algorithme effectif pour le calcul du produit de deux langages trace.

Nous démontrons ensuite que dans un monoïde finiment engendré quelconque la famille des ensembles aperiodiques est contenue (en général strictement) dans la famille des ensembles sans étoile, et nous étendons le théorème de Schützenberger, établi sur les mots, aux traces : la famille des langages trace aperiodiques coïncide avec la famille des langages trace sans étoile.

Avec l'idée d'étendre la notion de codage aux traces, nous étudions trois questions sur l'injectivité des morphismes entre monoïdes trace. Nous traitons essentiellement le problème de l'existence d'un morphisme injectif entre monoïdes trace. Pour cela nous introduisons la nouvelle notion de morphisme fort, qui impose que deux lettres indépendantes aient pour images des traces indépendantes.

ABSTRACT

This thesis deals with the free partially commutative monoids or trace monoids, which are one of the most important semantic models of parallelism. Recognizability of trace languages and coding on trace monoids are the basic subjects of this work.

Regarding the first domain we give a new proof for the closure by product of the recognizable trace languages family. Our method is to use the product language decomposition induced by a lattice associated to the commutation graph. We obtain, therefore, an effective algorithm for the product computation of two trace languages.

Then we prove that in an arbitrary finitely generated monoid, the family of aperiodic sets is contained (strictly in general) in the family of star-free sets, and we extend Schützenberger theorem, established on words, to traces: the aperiodic trace languages family coincide with the star-free trace languages family.

With the purpose of extending coding to traces, we study three questions on the injectivity between trace monoids. We essentially consider the problem of the existence of an injective morphism between trace monoids. Therefore we introduce the notion of strong morphism, which imposes the images of independent letters to be independent traces.

Table des Matières

1	Introduction	3
2	Préliminaires	9
2.1	Notations et conventions générales	10
2.2	Monoïdes	10
2.3	Graphes	12
2.4	Monoïdes libres	16
2.4.1	Définitions et notions générales	16
2.4.2	Codes	17
2.4.3	Equations dans le monoïde libre	18
2.5	Monoïdes trace	19
2.5.1	Définition et notions générales	19
2.5.2	Equations dans les monoïdes trace	24
3	Reconnaissabilité et rationalité	27
3.1	Le cas général	27
3.2	Relations entre $RAT(M)$ et $REC(M)$	30
3.3	Automates et reconnaissabilité dans le monoïde libre	31
3.4	Reconnaissabilité et rationalité dans un monoïde trace	36
4	Graphes bipartis, treillis et produit de langages trace	41

Table des Matières

4.1	Un système concurrent	42
4.2	Treillis associé à un graphe biparti	43
4.3	Un treillis associé au langage $[A^*B^*]$	48
4.4	Produit de langages trace	52
5	Langages trace sans étoile	57
5.1	Ensembles aperiodiques et ensembles sans étoile	58
5.2	Le théorème de Schützenberger	64
5.3	Le théorème de Schützenberger sur les traces	67
5.4	Une caractérisation des langages aperiodiques commutatifs	72
6	Morphismes entre monoïdes trace	77
6.1	Morphismes entre monoïdes trace	78
6.2	Trois problèmes sur les morphismes trace injectifs	81
6.2.1	Existence d'un morphisme trace injectif	81
6.2.2	Décidabilité de l'injectivité d'un morphisme trace	83
6.2.3	Injectivité du relèvement d'un morphisme trace	85
6.3	Les morphismes forts	90
6.3.1	Les morphismes forts injectifs	90
6.3.2	Les morphismes connexes	93
6.3.3	Les trois problèmes restreints aux morphismes forts	96
6.4	Une méthode de construction de morphismes forts injectifs	98
6.5	Conditions pour l'existence d'un morphisme fort injectif	102
6.6	Injectivité et graphes sans triangle	107
	Références bibliographiques	111