N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

« analyse numérique »

par

Marcel BOUHIER

— o —

QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE NUMERIQUE TRAITEES DU POINT DE VUE DE LA CALCULABILITE

— o —

Thèse soutenue le 28 février 1974 devant la commission d'examen :

Président :	N. GASTINEL
Examinateurs :	B. VAUQUOIS
	P.J. LAURENT
	F. ROBERT

Ce travail développe la théorie de l'analyse calculable. Cette branche des mathématiques, ancienne par sa logique, récente dans ses développements d'analyse est particulièrement méconnue.

L'objet de l'analyse calculable est de donner un support théorique "réaliste" au calcul numérique sur ordinateur.

L'analyse mathématique classique, dont le mérite est la simplicité ,est très mal adaptée au calcul automatique. Les êtres mathématiques : nombres réels, suites, fonctions,..., ne sont pas construits dans l'optique de la programmation. La définition classique d'une suite de nombres rationnels : "une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$" n'apporte aucun renseignement sur la construction d'une telle application. Le fait de savoir qu'une suite de nombres rationnels est une suite de Cauchy ne permet pas, en général, d'avoir la moindre idée de la valeur numérique de la limite de cette suite. L'information : "telle fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$" apporte des théorèmes d'existence de $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, de $x^* \in [a,b]$ tel que $f(x^*) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, etc, ..., mais ne donne aucune construction numérique de tels nombres. Enfin, nous verrons au paragraphe IV, un exemple de méthode numérique, construite selon les principes de l'analyse mathématique, qui, en général, ne se programme pas.

Ici, la machine, et la programmation vont jouer un rôle essentiel. Malheureusement, la topologie d'un ensemble fini est particulièrement pauvre. Par suite, la machine ne sera pas l'ordinateur tel que nous le connaissons, où seule une partie finie de $\mathbb{Q}$ peut être entrée en mémoire. Nous supposerons que la machine est capable de mémoriser $\mathbb{Q}$ tout entier. Si l'on préfère, l'unité centrale de notre machine serait à capacité variable. J'entends par là que cette capacité, fixée au début du calcul, serait susceptible d'évoluer selon le gré de l'utilisateur, dans des bornes dépendant de la difficulté (nombres rationnels traités) et de la précision des calculs effectués.

On distinguera les parties suivantes :

I - Présentation de la machine
Applications programmables
Les possibilités de la machine
(théorèmes de TURING et de DAVIS)

II - Présentation du corps des nombres calculables : seule une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ nous est accessible

La topologie calculable de ce corps
(théorème de CEÏTIN)

Utilisation à des fins calculables de certains résultats de l'analyse classique concernant les suites
(théorèmes de MAZUR)

III - Fonctions calculables : définitions et exemples
Suites calculables de fonctions calculables : exemples plus élaborés de fonctions calculables.

IV - Méthodes effectives de calcul numérique :

- de l'impossibilité de résoudre numériquement certains problèmes.
  (théorème de la proposition vraie à la limite et exemples)
- une méthode "usuelle" de calcul numérique qui n'est pas, en général, une méthode effective,
  (critique et remède)
- méthodes de points fixes pour des fonctions contractantes.

V - Propriété des fonctions calculables définies sur des intervalles :

* continuité classique (théorème de MAZUR) et continuité calculable (définitions de ABERTH).

* utilisation des définitions de ABERTH pour savoir :

  - dans quels cas $\sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ est-il un nombre calculable ?

- dans quels cas x^* tel que $f(x^*) = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ est-il un nombre calculable ?

- quand peut-on espérer calculer $\int_0^1 f(x)dx$?

(Quelques résultats et méthodes effectives originales).

VI - Etude de deux espaces fonctionnels : la notion d'espace vectoriel normé complet en analyse calculable.

VII - Références.