

RECHERCHE
OPERATIONNELLE
APPLIQUÉE

fiabilité et renouvellement des équipements

R. FAURE ET J.L. LAURIÈRE

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

collection
Programmation

GAUTHIER-VILLARS

C10866

COLLECTION « PROGRAMMATION »



Directeurs : L. NOLIN, A. LENTIN,
M. NIVAT

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE APPLIQUÉE 4

fiabilité et renouvellement des équipements

applications élémentaires
aux investissements

par

Robert FAURE

Professeur associé au Conservatoire national
des Arts et Métiers

Jean-Louis LAURIÈRE

Attaché de recherches au C.N.R.S.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

PARIS — BRUXELLES — MONTRÉAL



P R E F A C E

*Un bon cavalier de reconnaissance
doit être un peu fou, faute de quoi
il est un matricule, comme tout le
monde.*

Georges BUIS , La Barque.

Objet d'une averse curiosité avant 1960, puis d'expériences plus ou moins concluantes dans les années qui suivirent, la recherche opérationnelle ne tarda pas à susciter quelque méfiance chez les dirigeants d'entreprises les plus avancés. Aujourd'hui, quoique son image de marque ne cesse de s'améliorer, certains praticiens voudraient encore la débaptiser, arguant que l'appellation moins pompeuse d'"aide à la décision" serait plus propice à son développement. Et sans doute ont-ils raison.

Dans l'enseignement supérieur scientifique, sa fortune fut des plus diverses. Quelques spécialistes de mathématiques appliquées s'intéressèrent d'emblée à ses méthodes mathématiques, plusieurs limitant d'ailleurs leur champ d'investigation à la programmation mathématique, considérée, par ignorance, comme seule digne de retenir l'attention. Rarement enseignée en maîtrise, mais plus volontiers adoptée comme thème d'A.E.A., la recherche opérationnelle fournit néanmoins le sujet de bon nombre de travaux, notamment de thèses de 3ème cycle ou de docteur-ingénieur. Faute de prévoir -alors qu'ils commencent à s'en apercevoir sur le tas- qu'elle deviendrait un jour indispensable en informatique, les enseignants de cette discipline ont souvent négligé la recherche opérationnelle, et ne l'ont point considérée comme la fille aînée de l'informatique, ainsi qu'elle aime elle-même à se proclamer.

Une fâcheuse tendance à découper l'enseignement de la recherche opérationnelle se manifesta d'autre part, là où l'on s'inquiétait d'elle. On imaginait volontiers : les statisticiens traitant des applications des processus stochastiques (dont on excluait la gestion scientifique des stocks, bien que ce fût le sujet économiquement le plus important ...); les spécialistes

du calcul matriciel s'adjugeant la programmation linéaire, voire la programmation mathématique ; les quelques algébristes occupés (par tolérance) de combinatoire complétant leurs cours par des leçons sur les chemins valués ou les flots optimaux dans les graphes. En revanche, on ne sentait pas la nécessité de faire une place à la programmation dynamique, confondue avec la théorie de la commande optimale, et laissée pour cette raison, aux mécaniciens férus d'automatique, privant ainsi la recherche opérationnelle de l'une de ses idées-force. La théorie des jeux, enfin, était abandonnée aux gens subtils qui voulaient bien s'en charger, sans que cela leur ait valu un mot de remerciement.

Je précise bien qu'il ne s'agit là que des comportements les plus courants dans l'enseignement scientifique, car la recherche opérationnelle a été un peu moins maltraitée (mais évidemment considérée d'un autre point de vue), par les responsables des sciences économiques.

Le peu de cas qui est fait de la R.O. chez les scientifiques résulte, en fait, de ce que le problème de son enseignement n'a jamais été abordé franchement et en connaissance de cause. Combien ont cru que la R.O. n'était qu'un chapitre de l'économie ou, au contraire, une technique purement informatique, si quelques-uns étaient persuadés (aussi faussement) qu'elle se réduisait à ses méthodes mathématiques. Combien, tout en bavardant sur la pluridisciplinarité, ont dédaigné ce bel exemple de science-carrefour !

Je voudrais qu'on me permette de poser ici quelques questions et de tenter d'y répondre. Le lecteur voudra bien considérer que je m'exprime ici d'une manière absolument libre sur le point de savoir si la recherche opérationnelle peut et doit trouver sa place dans les études d'informatique, notamment de maîtrise, telle qu'elle existe à l'Institut de Programmation de PARIS VI, où je sévis depuis sa fondation (et même avant, si j'ose ainsi dire, puisque rue du Maroc, l'enseignement de l'informatique précéda l'officielle naissance de l'Institut, sous l'égide de mon bon maître, René de POSSEL).

Je pense personnellement que les aspects les plus pratiques de la recherche opérationnelle peuvent et doivent être enseignés aux futurs informaticiens.

A mon sens, cela valorise l'enseignement théorique et pratique de l'informatique pour bien des raisons : l'introduction de la recherche opérationnelle donne l'occasion d'intéresser les étudiants à des problèmes économiques, qu'on peut décider de choisir dans le domaine de l'entreprise ; elle leur permet de constater que les mathématiques, principalement du discret et du fini, sont directement utilisables dans la vie professionnelle ; elle les contraint à écrire et à faire passer sur l'ordinateur des programmes complexes, qui requièrent en général l'utilisation de machines puissantes ; elle les autorise enfin à résoudre eux mêmes les problèmes d'optimisation des systèmes (voire, simplement, de programmes), qui se posent à eux de plus en plus fréquemment.

Mais une fois décidé de faire une place à la recherche opérationnelle pratique dans le cursus de la maîtrise d'informatique, on demeure embarrassé. Ce n'est un secret pour personne que les connaissances en mathématiques des étudiants concernés ne dépassent celles du premier cycle que si l'on a soin de donner quelques compléments, durant le second, en matière de graphes, probabilités et statistiques. C'est ce qui a lieu à PARIS VI, où des cours de théorie des graphes et de probabilités sont donnés en première année de maîtrise, tandis que, dans le cadre de l'unité de valeur de recherche opérationnelle qui prend place en deuxième année, les statistiques sont enseignées et donnent lieu à des épreuves particulières.

Il n'est pourtant pas question, dans un enseignement destiné à cette catégorie d'étudiants, de rechercher systématiquement les exposés élégants, faisant appel à l'outillage mathématique le plus perfectionné et ne sacrifiant aucun détail à l'extrême rigueur du raisonnement. C'est pourquoi il paraît préférable de fixer son attention sur les méthodes (les algorithmes) "qui marchent" et leur application à des situations concrètes et non au problème idéal. Enfin, s'agissant de leçons destinées à des informaticiens, il semble tout indiqué de relier l'étude des éléments de la théorie à la pratique informatique, sans laquelle la recherche opérationnelle ne serait souvent qu'un divertissement de mathématicien désœuvré.

Autre question. En admettant que l'étude de la recherche opérationnelle en aborde les principales rubriques, apparemment si différentes, telles que la

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

programmation mathématique, les problèmes combinatoires discrets, les applications des processus stochastiques, etc..., par quel lien justifier le regroupement de l'ensemble au sein d'une même U.V. et comment faire face, pédagogiquement, à la nécessité de rester à un niveau mathématique modeste ?

Au cours de quinze années de tentatives successives, souvent vaines, parfois utiles, je me suis rendu compte que le lien unificateur et logique d'un enseignement de la pratique de la recherche opérationnelle, notamment dans ses relations avec l'informatique, était offert par la théorie des graphes, qui domine l'étude de tous les problèmes combinatoires discrets (problèmes de chemins, de flots optimaux, d'ordonnancements, de réseaux de transport, programmes de transport, problèmes d'affectation) et fournit une méthode excellente (jusque et y compris au plan du calcul) pour aborder les processus stochastiques, et leurs applications (fiabilité, renouvellement des équipements, files d'attente, gestion scientifique des stocks, méthodes de simulation). Malheureusement, jusqu'à présent, l'usage qu'on peut faire de la théorie des graphes en programmation mathématique demeure limité. Mais, même si l'on se borne à enseigner la programmation linéaire, en continu et en entiers, et la programmation convexe, cette partie du cours demeure la plus difficile pour les étudiants ; il est donc prudent de ne pas commencer par là : c'est ainsi que je procède depuis plus de dix ans, avec l'assentiment des élèves.

Le schéma joint propose un déroulement logique des différentes parties d'un cours de recherche opérationnelle et montre les liens, directs ou non, existant entre ces parties. On s'aperçoit que, seule, la programmation dynamique se trouve écartelée entre programmation certaine (qu'il faut placer avant l'étude des chemins optimaux dans un graphe) et programmation aléatoire (qu'on ne peut traiter qu'après les généralités sur les processus stochastiques).

Les multiples fascicules du manuel que les assistants de l'U.V. et moi présentons, à dater d'aujourd'hui, au public des informaticiens ou futurs informaticiens, se placent délibérément dans cette optique.

Le présent livre, portant le numéro 4 dans la série, utilise certaines notions de la théorie des graphes, d'autres ressortissant aux généralités sur les processus stochastiques et, enfin, les idées de la programmation dynamique.

Pour des raisons évidentes, ainsi le respect dû au lecteur d'un unique fascicule, l'étude en a été facilitée, pour ceux qui n'auraient pas suivi le cursus général (ce qui demeurera le cas de la majorité des lecteurs, en attendant que les fascicules situés en amont aient été édités, c'est à dire pendant quelques mois).

Etant donné que les fascicules constituant ce manuel d'informatique opérationnelle (c'est ainsi que nous nommons, par ellipse, la recherche opérationnelle, envisagée dans ses rapports avec l'informatique) ont été pour la plupart distribués durant de nombreuses années, depuis que j'en ai écrit le premier jet pour des éditions multigraphiées annuelles, ils ont subi des corrections et améliorations successives proposées par des enseignants et des étudiants. De plus, ils ont été ensuite revus, et parfois remaniés de nouveau puis préparés pour l'impression, grâce à la collaboration, pour chacun des volumes, d'un ou deux des assistants de l'U.V.

En particulier, le présent livre a été l'objet des soins de Jean Louis LAURIERE, maître assistant, qui, après m'avoir épaulé très efficacement durant plusieurs années universitaires, tant pour le second que pour le troisième cycle, ayant brillamment soutenu en 1971 une thèse de troisième cycle sur des applications de la coloration des hypergraphes aux emplois du temps, achève en ce moment sa thèse d'Etat. Il est intéressant de noter que ce travail remarquable jette un pont entre les démarches de la recherche opérationnelle et celles de "l'intelligence artificielle" et constituera sûrement une étape méthodologique dans le domaine de la résolution des problèmes combinatoires les plus généraux.

Malgré ces précautions, qui me paraissent garantir pour les lecteurs de toutes catégories -sauf les savants qui s'attendraient à y trouver des découvertes originales !- la possibilité d'employer les différents fascicules du manuel afin d'acquérir une connaissance pratique de la recherche opérationnelle, j'ai tenu à citer, en épigraphe, une phrase qui rappelle les risques

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

encourus. L'auteur de ce jugement insolite, que j'ai connu lors de la deuxième phase de la seconde guerre mondiale, n'est pas seulement un écrivain de talent ; il sait ce dont il parle quand il évoque les actions de reconnaissance. Je crois que sa boutade s'applique à notre entreprise, car les enseignants de l'U.V. d'informatique opérationnelle à l'Institut de Programmation de Paris VI se sont attaqués à une besogne de pionniers, bénéficiant de l'encouragement de quelques-uns, tels les professeurs ARSAC et NOLIN, de la neutralité bienveillante ou amusée de quelques autres, mais se heurtant aussi à l'indifférence du plus grand nombre et parfois à quelque hostilité.

Nous formons encore un détachement avancé. Nous avons pris le parti de transmettre nos connaissances sur un aspect éminemment concret des relations entre mathématiques, informatique, et économie d'entreprise. Nous nous sommes engagés parce que nous avons la foi. Selon la faveur avec laquelle les lecteurs accueilleront cette série, je saurai si l'offensive a été utile ou s'il valait mieux ne rien entreprendre et éviter d'entraîner de jeunes et excellents collaborateurs dans cette voie, quitte à ce que nous demeurions ensemble des matricules "comme tout le monde". Je veux dire des attentistes, se gardant des nouveautés, ou des éclectiques, incapables de s'émouvoir, donc de prendre franchement parti, mais habiles à vider les sujets épineux, comme les techniques pluridisciplinaires, de leur contenu concret, de manière à se donner la possibilité d'écrire d'élégantes dissertations sur des modèles vides de sens, dont on se complait à examiner les cas pathologiques, encore que personne ne les ait jamais rencontrés dans le réel.

Robert F A U R E

Professeur associé au Conservatoire des Arts et Métiers.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

T A B L E D E S M A T I E R E S

Préface de R. FAURE		V
<i>I</i> <i>FIABILITE D'UN EQUIPEMENT</i>		1
I.1. Définitions et notations		1
I.2. Classement des matériels par taux d'avarie		3
<i>II</i> <i>RELATIONS ENTRE LA FIABILITE ET LE MODE DE DEFAILLANCE</i> ..		4
II.1. Le matériel est soumis à un ensemble de cause d'ava- ries à variations aléatoires		4
II.2. Matériel soumis à plusieurs ensembles indépendants de causes d'avarie.....		10
II.3. Cas général des montages série et parallèle		11
II.4. Réserveation		13
<i>III</i> <i>PROCESSUS MARKOVIENS</i>		17
III.1. Cas des données discrètes		17
III.2. Exemple concret du magasinier		18
<i>IV</i> <i>PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT</i>		23
IV.1. Processus de renouvellement simple		23
IV.2. Autres processus de renouvellement		24
IV.3. Durée d'attente du n ^{ème} renouvellement		26
IV.4. Nombre de renouvellements, probabilité de consom- mation		28
IV.5. Exemple de fonction de renouvellement		32
IV.6. Densité de renouvellement		33
IV.7. Variance du nombre de renouvellements		34
IV.8. Comportement asymptotique d'un processus de renou- vellement		36
<i>V</i> <i>PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT SUPERPOSES</i>		39
V.1. Addition de plusieurs processus de renouvellements simples		39

V.2. Processus cumulatifs	41
V.3. Taux d'approvisionnement	43
V.4. Exemple dans le cas discret	46
V.5. Renouvellements avec temps de renouvellement aléatoire	55
<i>VI ESSAIS DE FIABILITE, ESTIMATIONS, TESTS D'HYPOTHESES ...</i>	59
VI.1. Plans d'expérience	59
VI.2. Fonction de répartition empirique, histogramme, moments empiriques	60
VI.3. Estimation des paramètres	60
VI.4. Exemple d'approximation d'une loi de survie par une loi continue	61
VI.5. Estimation du paramètre de la loi exponentielle ..	71
VI.6. Tests des hypothèses de fiabilité	73
<i>VII PROBLEMES LIES AUX DEFAILLANCES DES EQUIPEMENTS</i>	75
VII.1. Renouvellement préventif	75
VII.2. Renouvellement périodique	84
VII.3. Stratégie de renouvellement	85
<i>VIII METHODES USUELLES POUR LES PROBLEMES D'INVESTISSEMENT ..</i>	99
VIII.1. Cas déterministe	100
VIII.2. Application de la programmation linéaire	104
VIII.3. Application de la programmation dynamique discrète	106
VIII.4. Notion de déclassement	109
VIII.5. Cas aléatoire	113
VIII.6. Application du principe du maximum de Pontryagin	115
VIII.7. Critères de choix dans les jeux contre la nature	123
Bibliographie	129
Index	132