RECHERCHE
OPÉRATIONNELLE
APPLIQUÉE

éléments de programmation dynamique

J.-L. LAURIÈRE

collection
Programmation

gauthier-villars

COLLECTION « PROGRAMMATION »

Directeurs : L. NOLIN, A. LENTIN,
M. NIVAT

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE APPLIQUÉE **3**

éléments de programmation dynamique

par

Jean-Louis LAURIÈRE
Maître-assistant
à l'Université Pierre et Marie Curie

Préface de
Robert FAURE
Professeur au
Conservatoire National
des Arts et Métiers

gauthier-villars

PREFACE

Voici un maître-livre. Précis, concis, objectif, il n'a pas son pareil dans l'abondante littérature, consacrée depuis vingt ans à la *programmation dynamique,* après la parution de l'oeuvre initiatrice de Bellman.

L'auteur montre, bien entendu, l'*intérêt* de la méthode, et n'est pas avare d'exemples, à peine démarqués de la pratique, qui en illustrent la portée ; mais il est le premier à en souligner, avec raison, les *lourdeurs* et les *limites*.

Il est aussi le premier, sans doute, qui se soit préoccupé d'en exposer le mécanisme de la manière la plus simple, avec l'ambition de se *faire comprendre* du lecteur, dont il n'a pas oublié qu'il n'est pas nécessairement mathématicien. Cette tentative, louable en soi, m'a paru couronnée de succès : à l'évidence, la *clarté* demeure la qualité la plus éminente de son livre.

Je suis heureux et fier qu'il prenne place dans cette collection, regroupant des cours de maîtrise d'*informatique opérationnelle* effectivement enseignés à l'Institut de Programmation de Paris VI. Je me suis facilement consolé et immédiatement réjoui de constater le prodigieux bond qualitatif accompli par l'auteur, à qui j'avais remis - croyant lui rendre service - un fascicule de programmation dynamique, trop rapidement conçu et rédigé, en 1970, à la Havane, afin de l'enseigner d'abord sur place, et, par la suite, à nos étudiants parisiens.

En effet, l'ouvrage de Jean-Louis Laurière constitue non seulement un cours, à la fois plus simple et plus approfondi, mais encore un manuel pratique de programmation dynamique, auquel pourront se reporter avec fruit les hommes d'étude penchés sur les cas concrets de la vie active, administrative, commerciale et industrielle.

Robert FAURE

Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers

Conseiller Scientifique près la R.A.T.P.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

La programmation dynamique est une méthode de résolution de problèmes d'optimisation.

C'est une méthode générale qui a été utilisée avec succès pour optimiser la conduite de processus chimiques, la gestion des stocks dans les entreprises, le pilotage d'engins spatiaux, la planification économique.

Le mot *programmation* ne doit pas être compris dans le sens qu'on lui donne en informatique, il signifie précisément *résolution de problème* ; le problème est en général mis sous une forme appelée en recherche opérationnelle "programme mathématique" ; à chaque décision possible a été associée une variable et les contraintes physiques ou économiques qui régissent le système étudié, ont été traduites en conditions algébriques sur les variables de décison. On recherche une solution, c'est-à-dire un ensemble de décisions, qui est optimale vis-à-vis d'un critère appelé fonction économique. (Lorsque le "programme" - contraintes et fonction économique - est linéaire on parle tout naturellement de programmation linéaire. Cette hypothèse de linéarité n'est aucunement nécessaire pour pouvoir appliquer la programmation dynamique).

Le mot *dynamique* signifie que le *temps* intervient d'une façon cruciale dans la résolution : dans de nombreuses applications il s'agit essentiellement d'aider à prendre des décisions échelonnées dans le temps. Nous verrons qu'en outre le fondement même de la méthode est une optimisation récursive "période après période".

Les problèmes d'extremums ont depuis longtemps retenu l'intérêt des mathématiciens. En 1629, Pierre de FERMAT jetait les bases du calcul différentiel dans son traité "Méthodes de recherche des minimums et maximums". Jacques et Jean BERNOULLI, Léonhard EULER, Joseph Louis de LAGRANGE, établissaient des résultats fondamentaux du *calcul des variations*. Les problèmes d'optimisation que rencontre, aujourd'hui, le gestionnaire, l'ingénieur ou l'économiste appartiennent bien souvent à la même famille mathématique. C'est l'objet de la programmation dynamique que d'apporter une solution effectivement calculable à ces problèmes de décisions séquentielles, discrets ou continus, aléatoires ou déterministes, finis ou infinis.

Les travaux, dans les années cinquante, de Richard BELLMAN aux U.S.A. et de L.S. PONTRYAGIN en U.R.S.S. sont les plus connus.

Mais la programmation dynamique a été pratiquée avant d'être nommée. Comment ne pas penser lorsqu'on énonce le principe d'optimalité de R. BELLMAN au principe fondamental de l'optique - "la lumière suit des chemins extremaux"-de P. de FERMAT, au principe de moindre action en mécanique de MAUPERTUIS, à L. EULER qui remarquait "puisque la structure de l'univers est la plus parfaite qui soit et qu'elle fut imaginée par le créateur le plus sage, rien ne se produit où l'on ne puisse percevoir quelque raison de maximum ou de minimum", à G. POLYA enfin qui dans *Les mathématiques et le raisonnement plausible* , reprend un raisonnement de C. Mac LAURIN : "une fonction de plusieurs variables ne peut atteindre un maximum par rapport à toutes les variables réunies sans atteindre un maximum par rapport à chacune des variables prise séparément".

En 1944 Pierre MASSE utilisait déjà, implicitement, la programmation dynamique pour planifier les investissements d'Electricté de France.

Cet ouvrage tente de présenter - et c'est une approche nouvelle - la programmation dynamique de manière simple et naturelle tout en explicitant rigoureusement les bases théoriques.

Ainsi, le *théorème* d'optimalité du chapitre II exprime la propriété analytique fondamentale, mais le premier chapitre aura permis au lecteur de découvrir et de pratiquer par lui-même le principe de la méthode.

Dans le chapitre 3 nous présentons maints exemples concrets d'application dans le cas déterministe. Le quatrième chapitre est consacré d'une part aux techniques théoriques de réduction des calculs en machine, d'autre part au cas du passage à la limite - la période de temps étudiée est considérée comme infinie -, faisant ainsi le lien avec le principe du maximum de PONTRYAGIN et la commande optimale.

Dans de nombreuses situations concrètes une décision doit être prise dans un univers aléatoire. C'est alors la notion d'espérance mathématique qui guide le choix ; nous discuterons la pertinence de cette notion dans les cas précis de processus de *"décision-hasard"* présentés.

La détermination de stratégies à long terme pourra enfin être guidée à l'aide des chaînes de MARKOV, de la transformation Z et de la méthode de HOWARD.