STATISTIQUE ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES 4

OPTIMISATION EN ANALYSE ORDINALE DES DONNÉES

J.-F. MARCOTORCHINO P. MICHAUD

MASSON

STATISTIQUE ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

4

OPTIMISATION
EN ANALYSE ORDINALE
DES DONNÉES

par

J.F. MARCOTORCHINO P. MICHAUD

Ingénieurs de Recherche
au Développement Scientifique IBM-France

MASSON
Paris New York Barcelone Milan
1979

PRÉSENTATION DE LA COLLECTION

La Collection *« Statistique et décisions économiques » propose les cours de l'École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique (ENSAE) et du Centre d'Études des Programmes Économiques (CEPE), lequel est lui-même, pratiquement, une branche de l'ENSAE.*

C'est donc une collection dont la vocation scolaire est très affirmée, de sorte que le lecteur n'y trouvera d'ouvrages novateurs et fortement inspirés par une recherche personnelle qu'exceptionnellement.

En revanche, il devrait pouvoir y trouver normalement des exposés assez concis des modes de raisonnement ordinaires, assortis d'exemples et d'exercices souvent constitués par schématisation de situations concrètes.

Il est dans l'esprit des programmes des deux Écoles de mettre assez correctement en évidence les bases théoriques des méthodes ou des modèles proposés, afin qu'il n'y ait pas de malentendu quant à la portée véritable des règles d'action; par exemple dans l'ordre de ce que l'on appelle l'« économie normative ». Cela peut se traduire par une place assez large faite à l'abstraction, qui semblera parfois peu conforme à l'esprit d'Écoles destinées à former des statisticiens ou des économistes « professionnels ». Mais il n'y a guère de remède à ce détour, à moins que l'on ne s'en remette à des « principes d'autorité » parfaitement contestables.

Le lecteur doit encore savoir que les mathématiques éventuellement utilisées le seront comme langage, sans constituer une fin propre; du moins en règle générale. Ces mathématiques seront donc celles de l'ingénieur, sauf lorsque la mise en évidence de certaines propriétés exigera des outils plus puissants.

Enfin, il convient, sans doute, d'ajouter que les cours proposés sont normalement issus de plusieurs années d'enseignement, et que leur mise au point est largement redevable à la critique mutuelle des enseignants, ainsi qu'à la critique des élèves des deux Établissements. Chaque Auteur s'engage personnellement pour ses péchés, mais il doit beaucoup aux observations qui lui ont été faites.

Les deux Écoles souhaitent vivement que cette critique s'élargisse, et que de nombreux lecteurs jouent à leur tour le rôle de censeurs. Car c'est ainsi que l'on progresse.

J. C. Milleron et Ch. Prou.

TABLE DES MATIÈRES

(Contents : see p. IX)

Pages

TROISIÈME PARTIE

ORDRE INDUIT PAR DES COMPARAISONS PAR PAIRES

CONTENTS

AVANT-PROPOS

A notre époque l'arsenal des méthodes d'analyse des données est extrêmement important. De nombreuses méthodes de structuration, de classification et d'analyse des données ont été développées dans toutes les directions (analyse des correspondances, classifications hiérarchiques, non hiérarchiques, analyse discriminante, analyse canonique, segmentation, etc.). Cependant, on ne trouve pas grand chose dans la littérature scientifique sur la prise en compte de données ordinales ou issues de comparaisons préférentielles. Ceci pourrait laisser croire que cette dernière partie ne présente pas d'intérêt pratique et que le sujet n'a pas tellement été étudié.

Or c'est précisément l'inverse qui se produit.

De nombreux problèmes pratiques rencontrés fréquemment en psychologie en docimologie, en marketing, en économie et en politique nécessitent des modèles autres que ceux existants en analyse usuelle des données, il s'agit le plus souvent d'agrégation d'échelles, de classements, d'opinions. Ces problèmes ont été étudiés, du moins certains d'entre eux, depuis fort longtemps ; l'un des plus fameux est peut-être le problème de vote posé par Condorcet dès 1785. C'est à propos de ce problème que Condorcet introduisit la notion de comparaisons par paires (opinions), et releva différents paradoxes, désormais classiques en analyse ordinale des données.

Sur l'étude de la « structure mathématique » de ces différents problèmes, on dispose de nombreux articles d'auteurs tant français qu'étrangers (on pourrait citer ici ceux de Black [12], Arrow [1], Kemeny et Snell [40], Kendall [41], Bogart [16], Bowman [16], etc., pour les anglo-saxons ; Guilbaud et Rosensthiel [36], Monjardet [51], Frey et Barbut [4] et [5], Kreweras [42], Benzecri [7], Bermond [10], et bon nombre d'auteurs publiant dans la revue « Mathématiques et sciences humaines », du côté français, ces listes étant loin d'être exhaustives.

A l'inverse, sur l'étude des « algorithmes de résolution », le nombre des articles est bien plus restreint (on pourrait citer néanmoins ceux de E. Jacquet-Lagrèze [39], Kemeny et Snell [40], J. de Cani [17], Cook [21], J.-M. Blin [13], par exemple).

En définitive la limitation de l'utilisation de l'analyse ordinale des données est due principalement au manque de méthodes de résolution pratiques.

De ce fait, sans prétendre donner toutes les méthodes de résolution susceptibles d'être utilisées en analyse ordinale des données, nous proposons dans ce livre une collection de méthodes permettant de résoudre rapidement les grandes classes de problèmes d'agrégation rencontrés en analyse ordinale des données : pour les lecteurs spécialistes d'optimisation nous avons donné le détail de tous les algorithmes utilisés, et pour ceux soucieux d'applications, nous avons, à la fin de chacune des trois parties du livre, réuni quelques exemples, que nous espérons représentatifs

J.F. M. et P.M.
Septembre 1978

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier ici tous ceux qui nous ont aidé à réaliser cet ouvrage, tout particulièrement Monsieur René Moreau, Directeur du Développement Scientifique IBM-FRANCE dont les encouragements et les conseils nous ont été si précieux et Monsieur Maurice Papo, Directeur Scientifique de la compagnie IBM-FRANCE, qui nous a permis de concrétiser nos travaux de recherche.

INTRODUCTION

L'Analyse ordinale des données, dont est issu le titre de l'ouvrage, vaste champ mathématique à l'intersection de trois grands domaines des Mathématiques Appliquées : La théorie des graphes – L'optimisation – L'analyse statistique des données, n'a pas ou peu été étudiée intrinsèquement.

En effet, les développements les plus importants qui lui ont été donnés sont l'œuvre tantôt de statisticiens purs, tantôt de spécialistes de la théorie des graphes ou de l'algèbre, rarement de spécialistes de l'optimisation. De ce fait, si l'apport théorique sur le sujet est varié et amplement suffisant (voir Bibliographie), il semble que l'aspect algorithmique d'obtention de résultats réels reste très en-deçà du niveau acquis sur les théories émises.

Tout en ne négligeant pas la généralisation de tel ou tel résultat théorique si cela ne mettait pas en œuvre un vocabulaire trop spécifique, nous nous sommes dès lors surtout efforcés d'élaborer ou d'améliorer les méthodes d'optimisation propres à résoudre bon nombre de problèmes découlant de l'Analyse ordinale des données. C'est donc bien d'*Optimisation* en Analyse ordinale des données qu'il s'agit et non d'un traité général sur ce même sujet puisque nous ne parlerons pas par exemple d'analyses factorielles spécifiques aux données de préférences ou d'ordres type méthodes de Carroll et Chang [18] - Jacquet-Lagrèze [11] ou Benzecri [7].

En conséquence, nous nous sommes bornés à traiter des problèmes pour lesquels le support mathématique était l'*Optimisation*. Or il apparaît que cette classe de problèmes correspond quasiment à presque tous les cas réels que l'on rencontre dans la pratique. Les problèmes que nous étudierons dans l'ouvrage, se divisent en trois grandes classes, hiérarchisées, suivant la nature des données qu'ils utilisent.

*

* *

1 – *La première classe concerne les problèmes d'Agrégation d'Echelles* de Notes, de Valeurs ou de Rangs. – (Les rangs ne correspondant pas forcément ici à des classements sous forme d'ordres totaux.)

Les données se présenteront dans ce cas sous la forme d'un tableau T de terme général $\{t_{ij}\}$, $t_{ij} \geqslant 0, \forall\ i$ et j (du type de ceux rencontrés en Analyse des Données) croisant deux ensembles :

a) L'ensemble des « *Juges* » (au sens de l'agrégation des préférences).

Cette notion de « *Juges* », recouvrant l'idée :

- soit de juges physiques, au sens propre : (Arbitre, Professeur, Juge, Décideur, en d'autres termes personne physique donnant son opinion),

- soit de juges au sens figuré : (critères - variables de mesure - paramètres - caractéristiques, etc.).

b) L'ensemble des « *Candidats* », recouvrant l'idée :

- soit de candidats au sens propre : (Candidat physique - Elève - etc., en d'autres termes personne physique jugée).

- soit de candidats au sens figuré : (Objet statistique - un produit - une décision - un état de la nature, etc., bref un individu d'une population dénombrable au sens de la statistique).

$t_{ij} \in \mathbb{R}$ s'il s'agit d'échelles de valeurs,
$t_{ij} \in \mathbb{N}$ s'il s'agit de rangs ou de notes,
$t_{ij} \in \{0, 1\}$ dans le cas correspondant aux idées de oui-non (reçu, pas reçu) (dépendant, indépendant) (appartient, n'appartient pas) etc.

On notera dans tout l'ouvrage p le nombre de juges et n le nombre de candidats.

Disposant alors de ce tableau T, où chaque colonne T_k du tableau représente l'ensemble des notes, des valeurs ou des rangs donnés par le juge J_k aux n candidats, on se propose de trouver le vecteur inconnu à n dimensions X^* donné par un « juge virtuel » agrégeant l'ensemble des opinions des p juges. La recherche de ce vecteur inconnu X^* donnera lieu à un problème de minimisation qui s'écrira :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Min} \sum_{k=1}^{p} \mu\,(X,\ T_k) \\ \quad X \geqslant 0 \end{array}\right.$$

μ étant une métrique caractérisant la proximité entre l'échelle de notes X et les échelles T_k, métrique que nous choisirons *a priori*. Suivant la nature de μ, on verra que l'on aura affaire à un programme d'optimisation non linéaire à solution soit explicite soit implicite. Le cas où $t_{ij} = r_{ij}$ (rang du candidat i dans l'échelle du juge j) et le cas où $t_{ij} \in \{0, 1\}$ conduiront à des considérations particulières.

*
* *

2 – *La deuxième classe concerne les problèmes de Recherche d'ordres médians ou consensus.* — Nous disposons toujours de p « juges » et de n « candidats », seulement dans ce cas, les p juges J_k $(k = 1, 2, \ldots p)$ donnent un classement sous forme d'ordre total (ou de préordre) des candidats C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Dans le cas où les juges donnent un classement complet des candidats les données se présentent au départ :

- soit sous la forme du tableau $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P}\left\{\begin{array}{l} J_1 : \ C_{i_1(1)} \leqslant C_{i_2(1)} \leqslant C_{i_3(1)} \quad \ldots \leqslant C_{i_n(1)} \\ J_2 : \ C_{i_1(2)} \leqslant C_{i_2(2)} \leqslant C_{i_3(2)} \quad \ldots \leqslant C_{i_n(2)} \\ J_k : \ C_{i_1(k)} \leqslant C_{i_2(k)} \leqslant C_{i_3(k)} \quad \ldots \leqslant C_{i_n(k)} \\ J_p : \ C_{i_1(p)} \leqslant C_{i_2(p)} \leqslant C_{i_3(p)} \quad \ldots \leqslant C_{i_n(p)} \end{array}\right.$$

où « $\leqslant$ » signifie : « préféré ou équivalent » à.

Chaque classement d'un juge J_k est alors une permutation $P_k = (i_{1(k)}, i_{2(k)}, \dots i_{n(k)})$ des numéros identifiant les candidats, c'est-à-dire des n premiers entiers en cas de préférence stricte :

- soit sous la forme du tableau T précédent où $t_{ij} = r_{ij}$ (rang donné par le juge j au candidat i) avec la condition, dans le cas où les juges donnent des classements sous forme d'ordres totaux, que : $t_{ij} \neq t'_{ij}$ si $i \neq i'$.

Le problème d'optimisation associé consistera alors à trouver une distribution de rangs qui soit une permutation que nous noterons ici P, que nous appellerons classement *médian ou consensus*, donnée par un juge virtuel inconnu J, minimisant les « discordances » d'opinions entre les p juges et vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\operatorname*{Min}_{P} \sum_{k=1}^{p} \mu'(P, P_k) & \text{(cas où les opinions sont des ordres totaux)} \\ \quad P \in S_n & \\ \text{ou } \displaystyle\operatorname*{Min}_{P} \sum_{k=1}^{p} \mu'(P, \mathrm{T}_k) & \text{(dans le cas où l'on a affaire à des préordres)} \\ \quad P \in S_n & \end{array}\right.$$

μ' étant une des métriques compatibles avec le problème et S_n le groupe des permutations.

Dans le cas de la deuxième formulation, dont la première est un cas particulier, la différence avec le problème d'agrégation d'échelle de rangs, réside dans la contrainte supplémentaire que l'on fait subir à la distribution de rangs cherchée à savoir : $P \in S_n$ (le résultat doit être une permutation de $[1, 2, \dots, n]$.

Pour toutes les métriques μ' que nous présenterons dans ce livre, sauf une, les problèmes de minimisation associés nous conduirons à utiliser des algorithmes d'*optimisation sur des réseaux.*

* * *

3 – *La troisième classe concerne les problèmes de Recherche de hiérarchie ou d'ordre total induits par des comparaisons par paires.* – C'est à la fois une généralisation des problèmes précédents, et un problème différent puisqu'il permet de prendre en compte des tableaux de comparaisons par paires, qui sont l'aboutissement de la dégradation de la valeur quantitative des données.

En effet, dans le meilleur des cas un « juge » donne une note à chaque « candidat » ; s'il ne peut le faire, il a encore la possibilité de donner un préordre, s'il ne peut le faire également, il peut donner ses préférences sous forme de comparaisons par paires.

Dans ce cas chaque juge J_k fabrique le tableau Y^k de ses préférences croisant les n candidats C_i :

$Y^k =$

	C_1	C_2		C_j		C_n
C_1	0					
C_2		0				
C_i				y_{ij}^k		
C_n						0

où :

$$\begin{cases} y_{ij}^k = 1 \text{ si le juge } J_k \text{ « préfère » } C_i \text{ à } C_j \\ y_{ij}^k = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les conditions de transivité suivantes (vérifiées si les préférences forment un ordre total) :

$$y_{ij}^k + y_{jl}^k - y_{il}^k \leqslant 1 \quad \forall\ (i,\ j,\ l)$$

peuvent très bien être violées dans le cas général.

Remarque. – Si un juge J_k donne la note n_{ik} à chaque candidat C_i, on peut toujours fabriquer le tableau Y^k en effet il suffit de poser alors :

$$\begin{cases} y_{ij}^k = 1 \quad \text{si} \quad n_{ik} > n_{jk} \\ y_{ij}^k = 0 \quad \text{si} \quad n_{ik} \leqslant n_{jk} \end{cases}$$

De la même façon si chaque juge J_k donne un ordre total sur les candidats on pourra fabriquer le tableau Y^k suivant :

$$\begin{cases} y_{ij}^k = 1 \quad \text{si} \quad r_{ik} < r_{jk} \\ y_{ij}^k = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

la condition de transitivité précédente sera toujours vérifiée.

Nous voyons donc que les données des deux classes de problèmes précédents peuvent toujours être ramenées à un tableau de comparaisons par paires ; ce qui est plus général que les présentations sous forme de tableaux T ou $\mathscr{P}$.

En sommant alors pour tout couple de candidats $(i,\ j)$, les préférences y_{ij}^k de chacun des juges J_k, on obtient un tableau A de terme général a_{ij} où

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} y_{ij}^k$$

$A =$

	C_1	C_2	·	C_j	·	C_n
C_1	0	a_{i2}	· ·	a_{1j}	·	
C_2	a_{i1}	0	· ·		·	
C_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		
·						
C_n						0

d'où

– $a_{ij} = \sum_k \text{Max}\,(0, \text{Sgn}\,(n_{ik} - n_{jk}))$ si l'on a affaire à un tableau de données de type T

avec $$\text{Sgn}\,(n_{ik} - n_{jk}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n_{ik} > n_{jk} \\ 0 & \text{si } n_{ik} = n_{jk} \\ -1 & \text{si } n_{ik} < n_{jk} \end{cases}$$

– $a_{ij} = \sum_k \text{Max}\,(0, \text{Sgn}\,(r_{jk} - r_{ik}))$ si les données se présentent sous forme de rangs ou d'ordres.

– $a_{ij} = \sum y_{ij}^k$ si l'on a seulement affaire à des comparaisons par paires.

Dans le cas où l'on a affaire à des ordres totaux donnés par les p Juges J_k, on a de plus la relation suivante sur le tableau :

$$a_{ij} + a_{ji} = p \quad \forall\,(i, j)$$

Mais l'on peut, et c'est un aspect très important des tableaux de données de type A, ne pas nous en tenir au cadre rigide de la dualité (« Juges » – « Candidats »), et étudier intrinsèquement la structure de l'ensemble des « candidats » sans faire appel à celui des « Juges ».

En effet, si l'on est capable de définir :

- soit une *relation binaire* $\mathcal{R}$ liant deux à deux l'ensemble des candidats avec :

$i\ \mathcal{R}\ j$ signifiant : $\begin{cases} i \text{ « dépend » de } j \\ \text{ou } i \text{ « domine » } j \\ \text{ou } i \text{ « est antérieur » à } j \\ \text{ou } i \text{ « nécessite » } j, \text{ etc.} \end{cases}$

- soit un facteur de correspondance a_{ij} avec :

$\begin{cases} a_{ij} = \text{coût de positionnement de } i \text{ « avant » } j \\ \text{ou } a_{ij} = \text{nombre de fois que } i \text{ « implique » } j, \text{ etc.} \end{cases}$

On aboutit à un tableau de données de type A de terme général a_{ij} dont le traitement sera identique aux cas précédents. Les problèmes d'optimisation associés, consisteront à trouver un classement P donné sous forme d'ordre total sur les candidats, défini à partir d'un tableau Y, solution du programme linéaire suivant :

$$\text{Min} \sum_i \sum_j c_{ij}\, y_{ij}$$

sous les contraintes : $\begin{cases} y_{ij} + y_{ji} = 1 & i < j \\ y_{ij} + y_{jk} - y_{ik} \leqslant 1 & i \neq j \neq k \\ y_{ij} = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$

où le coût c_{ij} vaut a_{ji}, ou $-a_{ij}$ ou bien $a_{ji} - a_{ij}$ selon le contexte ou les données à traiter.

Remarque. – Dans le cas où les données se présentent sous forme d'ordres totaux donnés par p juges sur n candidats, les trois formulations du coût c_{ij} sont équivalentes, la solution obtenue P pourra représenter alors, l'opinion d'un juge virtuel J, voulant minimiser les « désaccords » entre les opinions des p juges de départ.

En fait, cette situation correspond à l'intersection de la classe : « Problèmes de Recherche de Consensus » et de la classe « Recherche de hiérarchies induites par des comparaisons par paires ».

*

* *

La classification des problèmes d'optimisation en Analyse ordinale des données telle que nous venons de la définir en trois groupes ne s'arrête pas là, en effet à l'intérieur de chaque groupe les problèmes diffèrent par la nature des métriques ou des critères utilisés.

Ainsi dans le groupe (1) *Agrégation d'échelles*, le choix de la métrique « μ » de référence que nous avons introduit précédemment va modifier la structure du problème.

Nous utiliserons, en effet, pour mesurer les différences entre échelles quatre types de métriques :

a) la métrique des Désaccords de rangs d_r,

b) les métriques de Hölder d_m, $m = 1, 2, \ldots$,

c) la métrique du Max d_∞

d) la métrique du Chi-deux d_{χ^2}.

L'utilisation de ces différentes métriques conduira, en général, à la résolution de *programmes non linéaires*.

Dans le groupe (2) *Recherche de consensus,* nous utiliserons en plus des métriques utilisées dans le groupe 1), modifiées en l'occurence, la métrique de Kendall des désaccords d'ordres d_o.

- L'utilisation de la métrique d_o conduira à la résolution d'un *programme linéaire en nombre entiers* à structure spéciale (résolution possible par programmation linéaire classique).
- L'utilisation des autres métriques conduira à la résolution de *programmes d'affectation* linéaire ou à goulôt d'étranglement selon le cas.

Dans le groupe (3) *Recherche d'ordres induits par des comparaisons par paires,* le programme mathématique à résoudre sera celui défini dans le cas 2) avec la métrique d_o. Mais à la différence des cas 1 et 2 précédents, on ne définira plus de métrique ; et les modifications de critères se feront directement sur la fonction économique.

Pour les problèmes des trois groupes, on a la possibilité de pondérer chaque juge J_k par un poids $\alpha_k \geqslant 0$, lorsque les données font jouer un rôle aux juges.

Ceci se traduira :

- Pour les problèmes du groupe 1) par la modification suivante de la fonction économique :

$$\text{Min} \sum_k \alpha_k \, \mu\,(X, T_k) \quad \text{au lieu de} \quad \text{Min} \sum_k \mu\,(X, T_k)$$

- Pour les problèmes du groupe 2) par :

$$\text{Min} \sum_k \alpha_k \, \mu'\,(P, P_k) \quad \text{au lieu de} \quad \text{Min} \sum_k \mu'\,(P, P_k)$$

- Pour les problèmes du groupe 3) par la construction d'un tableau A défini par :

$$a_{ij} = \sum_k \alpha_k \, y_{ij}^k \quad \text{au lieu de} \quad a_{ij} = \sum_k y_{ij}^k$$

On pourra se servir de ces pondérations pour faire de l'*analyse postoptimale* des solutions trouvées, c'est-à-dire étudier le comportement de la solution optimale lorsque l'on fait varier les pondérations sur les juges.

Au groupe (1) *Agrégation d'échelles*, on peut associer le problème type suivant :

On tient compte de p critères de mesures de nature différente pour se définir une échelle de préférence sur n produits. (Exemple : un certain nombre de voitures mesurées sur des critères de vitesse maximum, tenue de route, freinage, suspension, etc. ou d'ordinateurs de marques différentes, mesurés sur des critères de prix, de performances, de taille mémoire, etc.) On désire alors se définir et connaître un *critère virtuel* agrégeant les mesures faites sur les p critères de départ de façon à déterminer la ou les meilleures voitures, le ou les meilleurs ordinateurs, etc., comme on vient de le voir, le choix d'une métrique particulière modifiera la signification de l'agrégation réalisée.

Au groupe (2) *Recherche de classements médians ou consensus,* on peut associer le problème type suivant :

Un certain nombre de « décideurs » donnent leurs opinions sur des projets, on cherche un décideur « virtuel » donnant son opinion sur les projets de façon à minimiser les *désaccords* entre les différents « décideurs-juges », c'est-à-dire à trouver un *compromis* ; (la notion de désaccord dépendant bien entendu de la métrique choisie).

Remarque. – Les mots « décideurs » et projets sont pris ici au sens large, il pourra en effet s'agir de *décisions* face à des investissements, de *préférences* face à des situations données...

Au groupe (3) *Recherche d'ordres induits par des comparaisons par paires,* on peut associer en plus des problèmes précédents (qui peuvent toujours se ramener à des tableaux de type A, des problèmes de hiérarchisation de populations d'individus liés entre eux par des relations binaires i « R » j : i « domine » j, i « est plus important que » j, i « nécessite » j...

Exemples. – Dans la théorie des systèmes de décision, on rencontre de tels tableaux représentant des relations du type : la décision i « va influencer » la décision j ; la hiérarchisation des décisions possibles permet alors de se définir des règles de décision optimales.

Dans les problèmes d'élaboration de bases de données, on peut se définir des tableaux représentant des relations du type : l'information i « a besoin » de l'information j pour être obtenue ; la hiérarchisation des informations permettra d'optimiser la structuration de la base de données.

*

* *

Pour traiter un problème d'analyse ordinale des données se pose d'abord la question de savoir à quel groupe 1, 2 ou 3 il appartient ; une fois cette question résolue, va apparaître le problème du choix de la métrique μ à utiliser, ce choix dépendant de la signification qu'on entend donner aux critères ou du contexte dans lequel on va évoluer (nature des données de base, nombre de « candidats » en jeu, etc.). De plus on a la possibilité d'agir par pondération des critères ce qui pourra modifier considérablement les résultats. Il faudra également choisir pour les problèmes du groupe 3 la fonction économique la plus appropriée au cadre de travail.

De par la variété des problèmes, les choix des différentes métriques compatibles, les possibilités offertes de modifier la signification des problèmes par le biais de systèmes de pondérations et la grande diversité des domaines d'application, l'analyse ordinale des données est un vaste sujet qui fait appel à tout un arsenal de techniques mathématiques parfois fort complexes et qui mérite, nous le pensons les développements de ce livre.